

BACCALAUREAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHEMATIQUES

SERIE E

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

EXERCICE 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et pour tout nombre entier naturel non nul n , $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx$.

- 1-
 - a) Calculer I_0 .
 - b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .
- 2-
 - a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n .
 - b) Vérifier que : $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
- 3-
 - a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - b) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$.
 - c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque homogène P d'épaisseur négligeable.

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

La plaque P représente la portion du plan délimitée par la courbe (Cf) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

- 1-
 - a) Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; \pi]$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Tracer la courbe (Cf) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 , $\frac{\pi}{2}$ et π .

- 2- Démontrer que, l'aire exprimée en cm^2 , de la plaque est égale à $4\pi^2$.
- 3- On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :
- $$x_G = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x f(x) dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$
- On pose $I = \int_0^\pi \sin^2(2x) dx$ et $J = \int_0^\pi x \sin(2x) dx$.
- a) Vérifier que: $x_G = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{3} \pi^3 + J \right)$ et $y_G = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{4}{3} \pi^3 + 4J + I \right)$
- b) Calculer I. (on pourra utiliser la formule $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos 2t}{2}$)
- c) En utilisant une intégration par parties, calculer J.
- d) Dédurre des questions 3.a),b) et c) les coordonnées du point G.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm. On considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives 2 ; $-1 + i\sqrt{3}$; $-1 - i\sqrt{3}$ et -1.

Partie A

Soit (Γ) l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B et dont l'axe focal est l'axe (OI).

- 1- Construire les points A, B, C et Ω .
- 2-
 - a) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ) .
 - b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, I, J).
 - c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe (OJ).
- 3- Tracer (Γ) dans le repère (O, I, J).

Partie B

On désigne par s la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Soit E l'image du point C par h.

- 1-
 - a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
 - b) Démontrer que $s(E) = B$.
 - c) Construire les points F et K tels que $s(C) = F$ et $s(B) = K$.

- 2- Le cercle circonscrit au triangle BCE recoupe la droite (AB) en un point G et le cercle circonscrit au triangle BFK recoupe la droite (AK) en un point D.
- a) Construire les points G et D.
 - b) Démontrer que $s(G) = D$.
- 3- Soit $S_{(OA)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA).
- a) Démontrer que $S_{(OA)}(E) = G$
 - b) Justifier que $h(B) = G$
 - c) Démontrer que le triangle ABD est équilatéral de sens indirect.
- 4- Démontrer que le quadrilatère ADBC est un losange.
- 5- Démontrer que l'image du triangle DBA par h^{-1} est le triangle KAF (où h^{-1} est la réciproque de h).