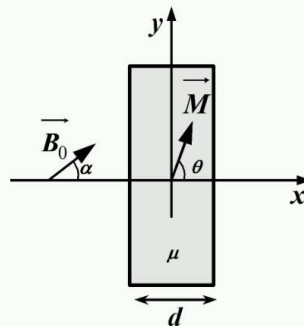


Épreuve d'électromagnétisme
"Électricité 3" - SMP4

I- lame paramagnétique dans un champ magnétique uniforme

Une lame paramagnétique de perméabilité μ , d'épaisseur d , de longueur et de largeur très grandes, est plongée dans un champ magnétique \vec{B}_0 (voir figure). La lame acquiert une aimantation \vec{M} uniforme.



1) Déterminer les différentes densités de courants d'aimantation qui apparaissent dans la lame aimantée en fonction de M et θ . Conclure

2) a) Montrer que le champ magnétique, créé à l'intérieur de la lame par ces courants ampériens d'aimantation, a pour expression $\vec{B}_m = \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_y$

b) En déduire le champ magnétique total \vec{B}_{int} et le vecteur excitation magnétique total \vec{H}_{int} à l'intérieur de la lame.

3) Exprimer le champ démagnétisant \vec{H}_D en fonction de M et θ .

4) Écrire les composantes de \vec{B}_{int} en utilisant l'expression $\vec{B}_{int} = \mu \vec{H}_{int}$.

5) En déduire une relation reliant les angles θ et α . (Démarche à suivre : égaliser les expressions de \vec{B}_{int} trouvées dans les questions 2-b) et 4) respectivement).

6) Déterminer les composantes du vecteur aimantation \vec{M} en fonction de B_0 , μ , μ_0 et α .

II- Condensateur sphérique rempli par un diélectrique parfait

Un condensateur sphérique est constitué de deux sphères métalliques concentriques (de centre O) de rayons respectifs a et $2a$. La sphère interne porte la charge $Q > 0$ et la sphère externe porte la charge $-Q$. L'espace situé entre les deux sphères est rempli par un diélectrique L.H.I. de permittivité variable :

$$\text{Pour } a < r < 2a : \quad \varepsilon(r) = \frac{\varepsilon_0 a}{1,5a - 0,5r} \quad \text{"r" est la distance par rapport au centre } O$$

Noter que : $\varepsilon(a) = \varepsilon_0$ et $\varepsilon(2a) = 2\varepsilon_0$

- 1) a) Déterminer le champ électrique dans le diélectrique ($a < r < 2a$).
b) En déduire la capacité du condensateur en fonction de a et ε_0 .
- 2) a) Déterminer les densités de charges de polarisation qui apparaissent sur les surfaces du diélectrique en $r = a$ et $r = 2a$ respectivement. (*Donner les expressions en fonction de Q et a*)
b) En déduire les expressions des charges de polarisation correspondantes en fonction de Q .
- 3) a) Expliciter l'expression de la densité de charge volumique de polarisation en fonction de Q , r et a .

On donne en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

- b) En déduire l'expression de la charge de polarisation qui apparaît dans le volume du diélectrique en fonction de Q . Conclure

III- Propagation d'une onde monochromatique dans un conducteur

Un milieu conducteur neutre de conductivité σ , de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0 occupe entièrement le demi espace $x > 0$. L'autre demi-espace est vide. On s'intéresse à la propagation dans ce conducteur d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω . Le champ électrique de cette onde a pour expression dans le conducteur :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \exp i(kx - \omega t) \vec{e}_z$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ H.m}^{-1}$, $\sigma = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, $f = 10 \text{ kHz}$ fréquence de l'onde.

- 1) Ecrire les équations de Maxwell dans le conducteur en faisant intervenir les champs \vec{E} et \vec{B} .

- 2) Ecrire puis calculer le rapport $\frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}_l\|}$ des modules des vecteurs :

- densité de courant de déplacement $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;
- densité de courant libre $\vec{J}_l = \sigma \vec{E}$.

Conclure

Dans la suite, on négligera les courants de déplacement.

- 3) a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par le champ \vec{E} dans le conducteur.
On donne : $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$
b) Etablir la relation de dispersion dans le conducteur.
c) En déduire l'expression finale du champ \vec{E} . Interpréter physiquement ce résultat.

I. - lame paramagnétique

1. - Densité de courant d'aimantation volumique :

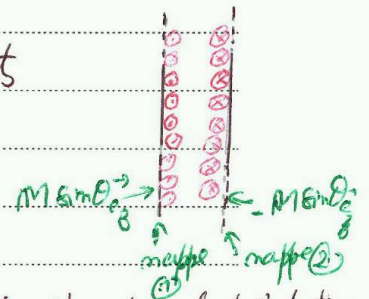
$$\vec{J}_{\text{m}} = \nabla \times \vec{M} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{M} \text{ uniforme}$$

.. Densité de courant d'aimantation surfacique :

$$\rightarrow \text{en } x = -d/2 \quad \vec{J}_{\text{m}}(-d/2) = \vec{M} \wedge -\vec{e}_x = M \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\rightarrow \text{en } x = d/2 \quad \vec{J}_{\text{m}}(d/2) = \vec{M} \wedge \vec{e}_x = -M \sin \theta \vec{e}_y$$

La lame paramagnétique \equiv 2 nappes de courants
 surfaciques



2. - a. Tout plan // au plan Oaz est plan de symétrie pour la distribution de courant

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{m}}(P) = B_{\text{m}}(P) \vec{e}_y$$

.. Il y a invariance de distributions de courant pour toute translation "y" ou "z" $\Rightarrow \vec{B}_{\text{m}}(P) = B_{\text{m}}(x) \vec{e}_y$

Nappe ①

$$\text{th. d'Amperé} \oint \vec{B}_{\text{m}1} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

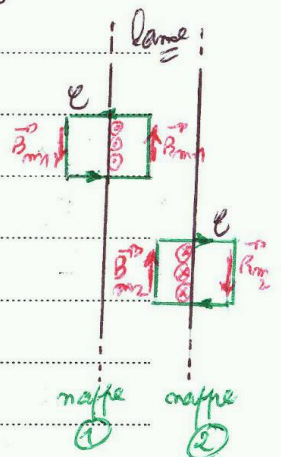
$$2 B_{\text{m}1} l = \mu_0 J_{\text{m}}(-d/2) l$$

$$\vec{B}_{\text{m}1} = \frac{\mu_0}{2} M \sin \theta \vec{e}_y$$

Nappe ②

$$2 B_{\text{m}2} l' = \mu_0 J_{\text{m}}(d/2) l'$$

$$\vec{B}_{\text{m}2} = \frac{\mu_0}{2} M \sin \theta \vec{e}_y$$



Le champ à l'intérieur de la lame :

$$\vec{B}_{\text{m}} = \vec{B}_{\text{m}1} + \vec{B}_{\text{m}2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{m}} = \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_y$$

②

$$2-b \quad \vec{B}_{int} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{am} = \vec{B}_0 + \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + M \sin \theta \vec{e}_y - \vec{M}$$

d'où $\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - M \cos \theta \vec{e}_x$

3. 1^{ère} méthode

$$\vec{H}_D = \frac{\vec{B}_{am}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{H}_D = -M \cos \theta \vec{e}_x$$

2^{ème} méthode

$$\vec{H}_{int} = \vec{H}_0 + \vec{H}_D$$

$$= \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \vec{H}_D$$

$$\Rightarrow \vec{H}_D = -M \cos \theta \vec{e}_x$$

$$4. \quad \vec{B}_{int} = \mu \vec{H}_{int} = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{B}_0 - \mu M \cos \theta \vec{e}_x$$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu_0} B_0 \cos \alpha - \mu M \cos \theta \right) \vec{e}_x + \frac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$5. \quad \vec{B}_{int} = \vec{B}_0 + \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{d'après 2-b})$$

$$= B_0 \cos \alpha \vec{e}_x + (B_0 \sin \alpha + \mu_0 M \sin \theta) \vec{e}_y$$

En égalisant cette expression avec celle trouvée en 4) :

$$\begin{cases} B_0 \cos \alpha = \frac{\mu}{\mu_0} B_0 \cos \alpha - \mu M \cos \theta \\ B_0 \sin \alpha + \mu_0 M \sin \theta = \frac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \cos \theta = B_0 \cos \alpha \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \\ M \sin \theta = \frac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \tan \theta = \frac{\mu}{\mu_0} \tan \alpha \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_2$$

$$6. \quad \vec{M} = M \cos \theta \vec{e}_x + M \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} B_0 \cos \alpha \vec{e}_x + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0^2} B_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

(3)

II - Condensateur sphérique rempli de diélectrique l.h.i.s

1-a - * Tout plan passant par O est plan de symétrie

* Il y a invariance de la distribⁿ de charge pour toute rotation Omp.

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

* Calcul de $E(r)$ pour $a < r < 2a$:

$$\text{Th. Gauss: } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \quad S = \text{sphère de rayon "r"}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$$

$$b - V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{\epsilon r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \int_a^{2a} \frac{1,5a - 0,5r}{\epsilon_0 a r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a} \int_a^{2a} \left(1,5 \frac{a}{r^2} - \frac{0,5}{r} \right) dr$$

$$\text{Donc } V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{3}{4} - 0,5 \ln 2 \right) = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{3}{4} - 0,5 \ln 2 \right)$$

$$2-a - * \sigma_p(a) = \vec{P}(a) \cdot (-\vec{e}_r) \quad \text{avec } \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$= - \frac{\epsilon(a) - \epsilon_0}{\epsilon(a)} \frac{Q}{4\pi a^2} \quad \epsilon(a) = \epsilon_0$$

$$= 0$$

$$* \sigma_p(2a) = \vec{P}(2a) \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\epsilon(2a) - \epsilon_0}{\epsilon(2a)} \frac{Q}{4\pi (2a)^2} \quad \epsilon(2a) = 2\epsilon_0$$

$$= \frac{Q}{32\pi a^2}$$

(4)

b - charges de polarisation surfacique :

$$* Q_p^s(a) = 0$$

$$* Q_p^s(2a) = \sigma_p(2a) \times 4\pi(2a)^2 \Rightarrow Q_p^s(2a) = \frac{Q}{2}$$

$$3-a - \epsilon_p(r) = - \operatorname{div} \vec{P}(r) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P(r))$$

$$= - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r)} \right) \frac{Q}{4\pi r^2} \right]$$

$$= - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[0,5 \left(-1 + \frac{r}{a} \right) \frac{Q}{4\pi} \right]$$

$$\epsilon_p(r) = - \frac{Q}{8\pi r^2 a}$$

$$b - Q_p^v = \int_a^{2a} \epsilon_p(r) 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_a^{2a} - \frac{Q}{8\pi r^2 a} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= - \frac{Q}{2}$$

$$\text{Charge de polarisation totale} = Q_p^{\text{tot}} = Q_p^s + Q_p^v = 0$$

\Rightarrow le dielectrique est globalement neutre.

(5)

III. Onde monochromatique dans un conducteur

$$1. \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{or } \vec{J}_e = \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}_e\|} = \frac{\epsilon_0 \omega \|\vec{E}\|}{\sigma \|\vec{E}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma}$$

$$\text{A.N.} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^4}{36\pi \cdot 10^9 \times 10^7} = \frac{1}{18} 10^{-12}$$

D'où $J_D \ll J_e$ on néglige les courants de déplacement

$$3. a. \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E}$$

$$\text{or } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \sigma \vec{E} \right] = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{D'où } \Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Eq. diff. vérifiée pour } \vec{E}$$

$$b. \quad \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0\sigma \vec{E}$$

$$\text{D'où } k^2 = i\omega\mu_0\sigma \quad \text{et } k = \sqrt{i} \sqrt{\mu_0\omega\sigma} \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\delta}$$

$$c. \quad \vec{E} = \underline{E}_0 \exp i \left[\frac{1+i}{\delta} x - \omega t \right] \vec{e}_z$$

$$= \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp i \left(\frac{x}{\delta} - \omega t \right) \vec{e}_z$$

Il s'agit d'une onde amortie qui se propage selon les "x" croissants.