

Instituto de Ciencias Matemáticas

Álgebra Lineal: Coordenadas y Matriz de Cambio de Base

1. Sea W un subespacio del espacio euclidiano R^3 y sean $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases de W . Encuentre la matriz de cambio de base $C_{A \rightarrow B}$

2. Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial real $V = D_{2 \times 2}$

- Determine los vectores coordenadas de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ respecto a B_2
- Encuentre la matriz $C_{B_2 \rightarrow B_1}$ de cambio de base de B_2 a B_1
- Determine los vectores coordenadas de v_1 y v_2 respecto a B_1 empleando $C_{B_2 \rightarrow B_1}$

3. Sean $B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial $V = D_{2 \times 2}$. Sea la matriz de cambio de base de B_1 a B_2

$$C_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encuentre los vectores v_1 y v_2 de la base B_1
- Usando la matriz de cambio de base $C_{B_1 \rightarrow B_2}$, determine $[u]_{B_2}$ si se conoce que $u = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

4. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial V . Sea $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V

- Demuestre que B_1 es una base de V si se sabe que $v_1 = u_1 - u_2$, $v_2 = u_2 - u_3$ y $v_3 = 2u_1 + u_2 - u_3$
- Encuentre la matriz de cambio de base de $B_1 \rightarrow B_2$

5. Sean S_1 y $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases de R^3 y sea la matriz de cambio de base de S_1 a S_2

$$C_{S_1 \rightarrow S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine la base S_1

b) Encuentre $[u]_{S_1}$ si $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. Sea $V = P_2$. Si $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ son bases ordenadas de V , y se conoce que:

$$C_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[x+1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, [x-1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } [x^2]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine los vectores de las bases B_1 y B_2

7. Sea $V = S_{2 \times 2}$ y B una base de V tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine:

a) Los vectores de la base B

b) La matriz de cambio de base desde B hacia la base canónica

8. Sea V un espacio vectorial con bases $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{2u_1 + u_2, u_1 - 3u_3, 5u_2\}$. Determine la matriz de cambio de base de B_1 y B_2

9. Sea V un espacio vectorial con bases B_1 y B_2 . Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 . Determine la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1

10. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial $V = S_{2 \times 2}$. Sea $C_{B_1 \rightarrow B_2}$ la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 , tal que:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determine los vectores de la base B_1

b) Encuentre $[3u_1 - 2u_2]_{B_2}$, si se conoce que $[u_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[u_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Encuentre los vectores u_1 y u_2

11. Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial $V = M_{2 \times 2}$

Determine:

a) La matriz de cambio de base $C_{B_1 \rightarrow B_2}$

b) Si $\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, hallar $\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right]_{B_1}$

c) Si $[A]_{B_1} + [A]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, hallar la matriz A

12. Sean $B_1 = \{p(x), q(x), r(x)\}$ y $B_2 = \{s(x), t(x), u(x)\}$ dos bases del espacio vectorial P_2 y sean:

$$[x^2 - x]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [x + 1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [2x^2 + 1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[s(x) + t(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [t(x) + u(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [u(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determine

a) Los vectores de cada base

b) Las coordenadas del vector $-x^2 + 3x + 2$ con respecto a la base B_2

13. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B_2 = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2, w_2\}$ **y** $B_3 = \{w_1, w_2, v_2\}$ **bases ordenadas de** $S_{2 \times 2}$ **y se conoce que:**

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **y** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **son la primera y segunda columna de la matriz de transición de** B_3 **a** B_1 **respectivamente.**

Determine:

a) Los vectores de la base B_1

b) $\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]_{B_3}$

c) $C_{B_1 \rightarrow B_3}$

d) A , **si** $[A + I]_{B_3} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]_{B_1}$

14. Sea $V = S_{2 \times 2}$, **con bases** $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ **y** $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$. **Sea** A **la matriz de cambio de base de** $B_2 \rightarrow B_1$ **tal que:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Determine los vectores de la base B_2

15. Sea $V = P_2$, **con bases** $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ **y** B_2 . **Sea** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **la matriz de cambio de base de** B_1 **a** B_2 . **Determine la base** B_2

16. Sea $V = P_2$, **con bases** $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ **y** $B_2 = \{x - 1, x^2 + 2x - 3, x^2 + 1\}$. **Construya la matriz de cambio de base de** B_1 **a** B_2

17. Sea V **un espacio vectorial y** $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ **una base de** V . **Se define el conjunto:**

$$W = \text{gen}\{v_1 + 2v_2, -v_1 + 3v_2 - v_3, v_1 + 3v_3\}$$

a) Determine una base para W , **denotada como** B_W

b) Si es factible, calcule la matriz de cambio de base de B **a** B_W

18. Sean $B_1 = \{x+1, 1\}$ y $B_2 = \{x+1, x-1\}$ dos bases del espacio vectorial P_1 . Determine:

- La matriz $C_{B_2 \rightarrow B_1}$ de cambio de base de B_2 a B_1**
- Si se conoce que $p(x) = -3x + 5$, usando la matriz hallada en el literal anterior calcular $[p(x)]_{B_1}$**
- Si $[r(x)]_{B_1} + [r(x)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar el vector $r(x)$**

19. Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial de dimensión

finita R^3

Determine:

- La matriz $C_{B_1 \rightarrow B_2}$ de cambio de base de B_1 a B_2**
- Si $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, usando $C_{B_1 \rightarrow B_2}$ hallar $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{B_2}$**
- Si $[v]_{B_1} + [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar el vector v**