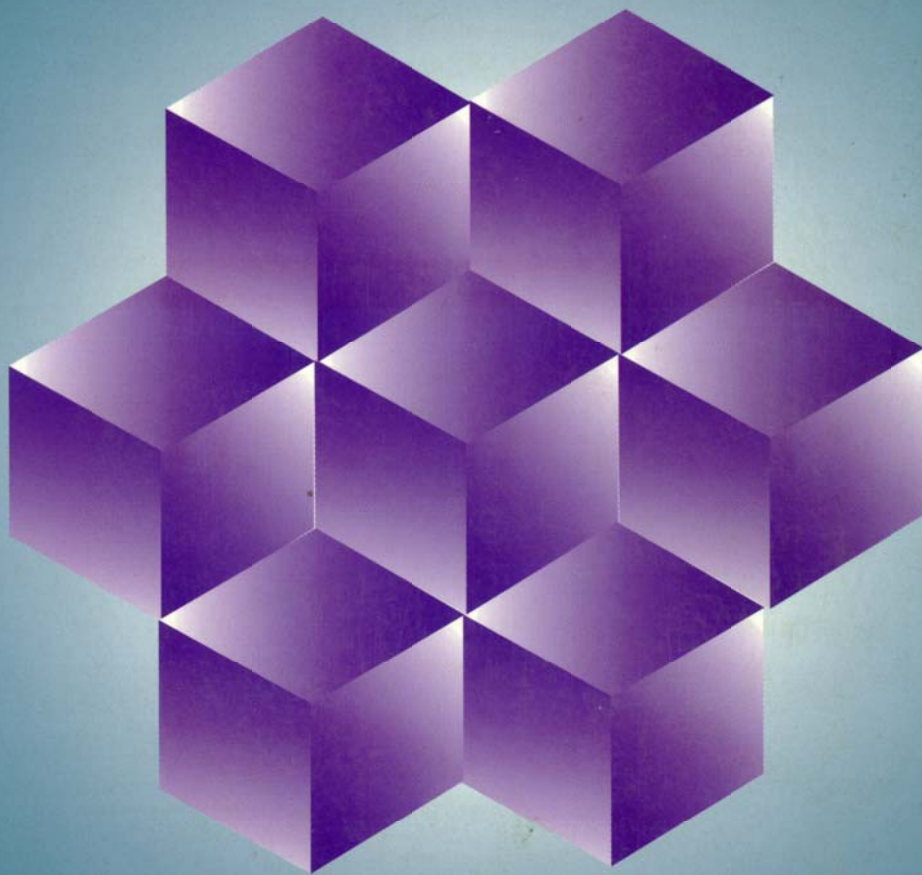


MATEMÁTICAS FINANCIERAS



ARMANDO MORA ZAMBRANO

Mc
Graw
Hill

51:336.01

M 827 m

277 p.

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

ARMANDO MORA ZAMBRANO

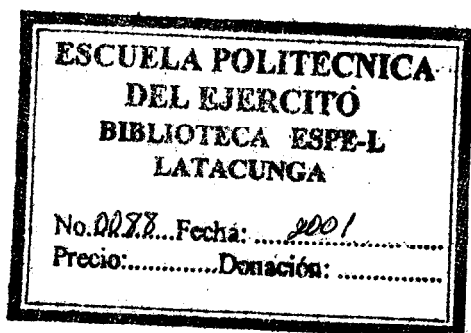
Ingeniero comercial

Revisión técnica

J. EDUARDO IREGUI ORTIZ

Contador público

Universidad Central



Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Guatemala • Lisboa • Madrid • México
Nueva York • Panamá • San Juan • Santiago de Chile • Sao Paulo
Auckland • Hamburgo • Londres • Milán • Montreal • Nueva Delhi • París
San Francisco • San Luis • Sidney • Singapur • Tokio • Toronto

Matemáticas financieras

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS. Copyright © 1998, por Armando Mora Zambrano.
Copyright © 1998, por McGRAW-HILL INTERAMERICANA, S. A.
Avenida de las Américas No. 46-41. Santafé de Bogotá, D. C., Colombia

Editora: Lily Solano Arévalo

Diagramación: Emilse Londoño D.

4123567890

9012345678

ISBN: 958-600-783-9

Impreso en Colombia

Printed in Colombia

Se imprimieron 3.000 ejemplares en el mes de Enero de 1998

Impreso en Colombia por: *D'VINNI EDITORIAL LTDA.*

DEDICATORIA

A mi esposa Anita, y a mis hijos Santiago y Francisco, a mis compañeros profesores del área de matemática de la Universidad Central del Ecuador y de la Escuela Politécnica del Ejército, de las facultades de ciencias administrativas, ingeniería comercial, ciencias de la educación, economía, y a mis alumnos, por su permanente apoyo y estímulo en la realización del presente texto.

Un especial agradecimiento a la Editorial McGraw-Hill Interamericana S. A., que hizo posible la edición de esta obra, así como a los funcionarios de la Corporación para el Desarrollo de la Educación Universitaria, el Programa RTAC-II, el Banco Central, la Bolsa de Valores de Quito, la Universidad Técnica de Ambato, el Colegio Luis Napoleón Dillon y demás personas que en alguna manera me impulsaron a publicar este trabajo.

PRÓLOGO

En esta edición de MATEMÁTICAS FINANCIERAS escrita por el profesor ARMANDO MORA ZAMBRANO se presenta una metodología práctica y con un lenguaje sencillo que permite al estudiante con escasos conocimientos financieros, adquirir la habilidad y capacidad de desarrollar problemas de matemáticas financieras que surjan en el transcurso de su profesión.

Cada capítulo contiene una justificación del tema por tratar, un objetivo que plantea el contenido general del capítulo, una conducta de entrada y respuestas que dan una guía del desarrollo del capítulo y del tema mediante la deducción de las fórmulas utilizadas. Además se presentan las secciones de ejercicios propuestos y desarrollo que le permiten aplicar los conocimientos adquiridos en el capítulo, autoevaluación para que se practique lo aprendido en el capítulo, problemas de repaso y sus respuestas para que el estudiante evalúe el nivel de aprendizaje obtenido.

El número de problemas planteados para desarrollar permite que el estudiante practique en cada capítulo de manera suficiente el tema tratado.

La metodología utilizada facilita al estudiante comprender e interpretar cualquier problema que se le plantee en el mundo de las matemáticas financieras.

El texto está orientado al estudiante de las ciencias administrativas, económicas y similares y, en general, a aquellos que en su pènsun académico deban estudiar matemáticas financieras. Al mismo tiempo sirve como libro de consulta para aquellos que quieran incursionar en esta área específica.

Esta edición es un aporte importante a los programas académicos de las universidades y escuelas de economía y a las bibliotecas de consulta.

EDUARDO IREGUI ORTIZ

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas financieras constituyen una aplicación del vasto campo de las matemáticas; su estudio es un requisito dentro del p \acute ns \acute sum de materias en la formaci \acute on universitaria de profesionales en administraci \acute on de empresas, administraci \acute on p \acute blica, auditoria, economia, ingenieria comercial, bancaria, bursatil y ciencias afines.

Su conocimiento es necesario en las actividades del administrador por cuanto requiere aplicar las matemáticas financieras en las operaciones de cr \acute dito, ahorros, inversiones, descuentos, depreciaci \acute on, valor actual, negociaci \acute on y utilizaci \acute on de documentos financieros, como pagar \acute s, letras de cambio, c \acute edulas hipotecarias, bonos, pago de cupones, acciones, certificados de inversi \acute on, etc. Incluso para analizar y seleccionar los pr \acute stamos internacionales o nacionales, en diferentes condiciones, tasas de inter \acute s a corto, mediano y largo plazo. El inter \acute s sobre los saldos deudores tambi \acute en constituye una aplicaci \acute on pr \acute ctica de esta disciplina, as \acute como el financiamiento de obras, equipos, bienes, y capital de operaci \acute on de las empresas mediante amortizaci \acute on gradual. La elaboraci \acute on de tablas de amortizaci \acute on se aplica como base para cr \acute ditos a mediano y largo plazo, operaciones de seguros, an \acute lisis financieros y contables; es decir, que se utilizan como herramienta principal en las actividades de la vida profesional de un administrador, economista, financista, auditor o carrera similar.

El texto contiene un primer cap \acute itulo de generalidades con revisi \acute on de porcentajes y su aplicaci \acute on en compras y ventas de bienes, precio de compra, de venta, utilidad, procedimientos de c \acute culo; la depreciaci \acute on por diferentes m \acute todos, el m \acute todo de la l \acute nea recta; logaritmos con sus aplicaciones para calcular las variables i y n , como tasa de inter \acute s y periodos de capitalizaci \acute on; las progresiones aritm \acute ticas, geom \acute tricas infinitas y ecuaciones, con problemas propuestos y autoevaluaci \acute on.

El segundo cap \acute itulo se refiere al inter \acute s simple, f \acute rmulas de c \acute culo, el monto, tasa de inter \acute s, tiempo, valor presente o valor actual, sistemas y procedimientos de c \acute culo, procedimientos abreviados de c \acute culo, liquidaci \acute on de pr \acute stamos, gr \acute ficas de tiempos y valores, el inter \acute s simple vencido y anticipado, y las compras a plazo con sus modalidades.

El tercer cap \acute itulo estudia el descuento simple: descuento racional y descuento bancario o comercial, el valor actual con descuento bancario o valor efectivo, el precio de un documento a corto plazo, la tasa de inter \acute s y la tasa de descuento. Adem \acute s presenta ejercicios y problemas para consolidar el aprendizaje.

El cuarto capítulo incluye la utilización de las ecuaciones de valor en obligaciones con diferentes vencimientos y tasas de interés; la selección de la fecha focal, la comparación de ofertas para comprar o vender y explica el funcionamiento de las cuentas de ahorro con su liquidación de intereses.

El capítulo quinto contiene el interés y descuento compuesto, el monto, la tasa efectiva y nominal, tasas equivalentes, tasas anticipadas y vencidas, la capitalización de los intereses con sus fórmulas de cálculo, el análisis de opciones de inversión con diferentes tasas y problemas de aplicación, el valor actual o precio de documentos a largo plazo –a la par, con premio o con castigo–, el tiempo equivalente y su aplicación en las ecuaciones de valor a largo plazo.

El capítulo sexto se refiere a las anualidades o rentas, su clasificación, fórmulas del monto (S) y valor actual (A), así como de la renta, tasas de interés y periodos de pago. Se incluyen las anualidades vencidas y anticipadas, así como una introducción a los gradientes.

El capítulo séptimo trata de las amortizaciones y fondos de amortización o de valor futuro, las tablas de amortización, el saldo insoluto, reconstrucción de tablas, los derechos del acreedor y los derechos del deudor, el reajuste de tasas de interés y su aplicación en endeudamiento a largo plazo, así como tablas de fondo de valor futuro y su aplicación en la formación de capitales.

El capítulo octavo incluye nociones sobre el sistema financiero, sus principales normas e instituciones que lo conforman, el mercado de valores, los documentos financieros, su clasificación de renta fija y de renta variable, precio y rendimiento de un documento. Bonos, características, el precio de un bono sucio y de un bono limpio, seguros, tasas de interés: LIBOR Y PRIME RATE, valor actual neto y tasa interna de retorno, y documentos financieros como pólizas, cédulas hipotecarias, bonos, etc.

Al inicio de cada capítulo se incluye una justificación, el respectivo objetivo general y los objetivos específicos; en cada tema se incluyen ejemplos que aclaran los conceptos y su aplicación. Al final de cada capítulo se proponen problemas y se dan las respectivas respuestas, y se introducen actividades de repaso para una mejor comprensión de la materia.

Como se explicó anteriormente, su alcance comprende sólo texto básico de matemática financiera; es decir, no se incluye lo que corresponde a depreciación económica, análisis de proyectos, registros contables y otros temas que requieren un análisis más profundo en materia financiera.

A QUIÉNES VA DIRIGIDO

El trabajo tratará de ser una ayuda en la formación del estudiante y una obra elemental de consulta para profesores y profesionales puesto que se incluyen planteamientos de fórmulas básicas y su demostración con los respectivos elementos, las subdivisiones de ellas, el planteamiento de problemas simples, su desarrollo y explicación, y problemas para resolver. De acuerdo con la mayoría de autores en la materia y por experiencia vivida en el dictado de la cátedra, éste parece ser el mejor procedimiento para lograr una mayor comprensión.

APLICACIÓN

La aplicación de este texto se enmarca dentro de la enseñanza de la materia de matemáticas financieras, como se dicta en las universidades, politécnicas, institutos superiores, colegios de especialización; además, puede ser utilizado por cualquier lector interesado en las técnicas y procedimientos del cálculo financiero básico, de corporaciones financieras, cooperativas de ahorro y crédito, instituciones de seguridad social, bancos, compañías administradoras de fondos, funcionarios de tesorería, bolsas de valores y otras.

CONTENIDO

	Pág.
CAPÍTULO 1	
GENERALIDADES	1
Justificación	3
Objetivo general	3
Objetivos específicos	3
Conducta de entrada	3
Respuestas a la conducta de entrada	4
Porcentaje	4
Procedimientos para el cálculo de porcentajes	5
Aplicaciones	6
Depreciación	8
Métodos de depreciación	8
Agotamiento	12
Logaritmos	12
Cálculo de n e i	13
Progresiones	17
Progresión aritmética	18
Progresión geométrica	20
Progresión geométrica infinita	22
Ecuaciones	24
Ejercicios y problemas propuestos	25
Autoevaluación	30
Respuestas a la autoevaluación	30
Actividades de repaso	32

CAPÍTULO 2

INTERÉS SIMPLE	33
Justificación	35
Objetivo general	35
Objetivos específicos	35
Conducta de entrada	35
Respuestas a la conducta de entrada	36
Interés	36
Tasa de interés (i)	37
Interés simple	37
Formas de calcular el interés simple	37
Variación del cálculo del interés	39
Variación de la tasa de interés en función del tiempo	40
Procedimientos abreviados de cálculo	41
Cálculo del capital	43
Cálculo de la tasa de interés	44
Cálculo del tiempo	45
Cálculo del monto a interés simple	47
Cálculo del valor actual a interés simple	47
Gráfica de tiempos y valores	48
El interés sobre saldos deudores	50
Ejercicios y problemas propuestos	57
Autoevaluación	60
Respuestas a la autoevaluación	61
Actividades de repaso	64

CAPÍTULO 3

DESCUENTOS	65
Justificación	67
Objetivo general	67
Objetivos específicos	67
Conducta de entrada	67
Respuestas a la conducta de entrada	68
Descuento	69
Redescuento	69
Documentos de crédito	69
Letra de cambio	69
Pagaré	70
Otros documentos financieros	70

Descuento racional	70
Descuento bancario, comercial o bursátil	72
Valor actual con descuento bancario o valor efectivo	74
Análisis de la relación descuento racional-descuento bancario y comparación entre tasa de interés y tasa de descuento	76
Ejercicios y problemas propuestos	80
Autoevaluación	83
Respuestas a la autoevaluación	84
Actividades de repaso	87

CAPÍTULO 4

ECUACIONES DE VALOR Y CUENTAS DE AHORRO	89
Justificación	91
Objetivo general	91
Objetivos específicos	91
Conducta de entrada	92
Respuestas a la conducta de entrada	92
Ecuaciones de valor	92
Aplicaciones de las ecuaciones de valor	93
Cuentas de ahorro	99
Sistema de cálculo de los intereses	100
Liquidación de intereses en cuentas de ahorro	101
Ejercicios y problemas propuestos	107
Autoevaluación	110
Respuestas a la autoevaluación	111
Actividades de repaso	116

CAPÍTULO 5

INTERÉS COMPUESTO	117
Justificación	119
Objetivo general	119
Objetivos específicos	119
Conducta de entrada	119
Respuestas a la conducta de entrada	120
Interés compuesto	120
Comparación interés simple-interés compuesto	121
Variables del interés compuesto	123
Fórmula del monto a interés compuesto	124

Monto compuesto con periodos de capitalización fraccionarios	128
Tasas equivalentes	130
Fórmula de equivalencia tasa nominal-tasa efectiva	131
Alternativas de inversión, comparando tasas de interés	133
Tasa de interés anticipada	135
Cálculo de la tasa de interés	136
Cálculo del tiempo en interés compuesto	139
El valor actual a interés compuesto, o cálculo del capital	142
Precio de un documento	144
Valor actual con tiempo fraccionario	145
Descuento compuesto	149
Ecuaciones de valor en interés compuesto	150
Comparación de ofertas	151
Remplazo de las obligaciones por dos pagos iguales	152
Tiempo equivalente	155
Ejercicios y problemas propuestos	157
Autoevaluación	160
Respuestas a la autoevaluación	161
Actividades de repaso	165

CAPÍTULO 6

ANUALIDADES O RENTAS	167
Justificación	169
Objetivo general	169
Objetivos específicos	169
Conducta de entrada	170
Respuestas a la conducta de entrada	171
Anualidades o rentas	171
Clasificación de las anualidades o rentas	171
Anualidades vencidas	173
Monto de una anualidad	174
Valor actual de una anualidad	175
Cálculo de la renta o pago periódico	177
Cálculo del número de periodos de pago	179
Cálculo de la tasa de interés (i)	182
Anualidades anticipadas	185
Gradientes	188
Ejercicios y problemas propuestos	190
Autoevaluación	193
Respuestas a la autoevaluación	194
Actividades de repaso	196

CAPÍTULO 7

AMORTIZACIÓN Y FONDOS DE AMORTIZACIÓN 197

Justificación	199
Objetivo general	199
Objetivos específicos	199
Conducta de entrada	200
Respuestas a la conducta de entrada	200
Amortización	201
Cálculo de la cuota o renta	201
Capital insoluto y tabla de amortización	202
Forma de elaboración de la tabla de amortización gradual	203
Cálculo del saldo insoluto	204
Reconstrucción de la tabla de amortización	205
Periodo de gracia	206
Derechos del acreedor y el deudor	207
Amortizaciones con reajuste de la tasa de interés	209
Cálculo de la renta cuando no coincide el periodo de pago con el periodo de capitalización	210
Fondos de amortización o de valor futuro	211
El saldo insoluto en fondos de amortización	212
La unidad de valor constante (UVC)	214
Ejercicios y problemas propuestos	215
Autoevaluación	218
Respuestas a la autoevaluación	220
Actividades de repaso	223

CAPÍTULO 8

DOCUMENTOS FINANCIEROS 225

Justificación	227
Objetivo general	227
Objetivos específicos	227
Conducta de entrada	228
Respuestas a la conducta de entrada	228
Sistema financiero	229
Mercado de valores	231
Principales documentos financieros	231
Precio de los documentos financieros	232
Bonos	233
Características	233

Fórmula para calcular el precio de un bono	234
Precio de un bono comparado entre fechas de pago de intereses	236
Interés redituable de un bono	237
Rendimiento de un bono	237
Bonos cupón cero	238
Seguros	239
Tasa de interés real	241
Tasas de interés internacionales	243
Valor actual neto (VAN)	243
Tasa interna de retorno	243
Ejercicios y problemas propuestos	246
Autoevaluación	249
Respuestas a la autoevaluación	250
Actividades de repaso	252
 ÍNDICE DE TABLAS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS	 253
 BIBLIOGRAFÍA	 263

Capítulo

GENERALIDADES

1

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Porcentaje

Procedimientos para el cálculo de porcentajes

Aplicaciones

Depreciación

Métodos de depreciación

Agotamiento

Logaritmos

Cálculo de n e i

Progresiones

Progresión aritmética

Progresión geométrica

Progresión geométrica infinita

Ecuaciones

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN

Es conveniente y aconsejable realizar un breve repaso de conocimientos de matemáticas básicas, en especial de aquellos que se utilizarán con más frecuencia en el texto: el porcentaje, la depreciación, los logaritmos, las progresiones y sus correspondientes aplicaciones. Es necesario hacer este breve repaso conceptual y práctico para facilitar la comprensión de los temas que se tratarán en el libro.

OBJETIVO GENERAL

Lograr que el lector o estudiante esté en condiciones apropiadas de asimilar el contenido de la materia matemáticas financieras.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✎ Conocer y aplicar el concepto de porcentaje.
- ✎ Efectuar aplicaciones reales de porcentaje en descuentos.
- ✎ Aplicar conceptos básicos de depreciación.
- ✎ Aplicar logaritmos a las variables n e i .
- ✎ Revisar conceptos de progresiones.
- ✎ Repasar ecuaciones básicas.

CONDUCTA DE ENTRADA

Seleccionar la respuesta correcta.

1. $1/10 =$ a) 0,001 b) 0,0001 c) 1,0 d) 0,10
2. $1/4 =$ a) 0,25 b) 0,025 c) 1,25
3. $1 \frac{1}{8} =$ a) 1,5 b) 1,25; c) 1,125
4. $8 \frac{1}{16} =$ a) 8,25 b) 8,05 c) 8,0625

5. $25 \frac{2}{3} =$ a) 25,65 b) 25,67 c) 25,33
6. $8^0 =$ a) 8 b) 80 c) 0,8 d) 0 e) 1
7. $x + 0,5x =$ a) $x(1 + 0,5)$ b) $x(x + 0,5)$ c) $x(1 - 0,5)$
8. $\log_{10} 100 =$ a) 3 b) 10 c) 1 d) 0 e) 2
9. Complete la cantidad que falta en las siguientes series.
 a) 3, 6, 9, ...
 b) 4, 8, 16, ...
10. ¿Qué significa utilidad en la venta de un bien?

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

1. d 2. a 3. c 4. c 5. b
6. e 7. a 8. e 9. a) 12 9. b) 20
10. Es la diferencia entre el precio de venta y el precio de costo.

PORCENTAJE

Se conoce con el término porcentaje o tanto por ciento a la proporcionalidad que se establece con relación a cada cien unidades. Consiste en relacionar una cantidad con respecto a 100 y se expresa con el símbolo %.

Cualquier número expresado en forma decimal puede ser escrito como porcentaje, colocando simplemente el punto decimal dos lugares a la derecha y agregando el símbolo %¹. Por ejemplo:

- 5% significa tomar 5 unidades de cada 100.
- 50% significa tomar 50 unidades de cada 100.
- 0,5% significa tomar 0,5 unidades por cada 100.
- $\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$; $\frac{50}{100} = 0,5 = 50\%$; $\frac{0,5}{100} = 0,005 = 0,5\%$

1. Frank Ayres Jr. *Teoría y 500 problemas resueltos*. Ed. McGraw-Hill. México, 1971, p. 8.

El 100% de una cantidad es la misma cantidad, pues se toma su totalidad; por ejemplo, el 100% de 50 es 50.

Existe también el tanto por ciento fraccionario que se utiliza con frecuencia en las tasas de interés; por ejemplo:

- $1\frac{1}{8}\% = 1,125\% = 0,01125$
- $10\frac{2}{16}\% = 10,125\% = 0,10125$
- $11\frac{2}{8}\% = 11,25\% = 0,1125$
- $9\frac{5}{16}\% = 9,3125\% = 0,093125$

PROCEDIMIENTOS PARA EL CÁLCULO DE PORCENTAJES

De acuerdo con el concepto de porcentaje antes expresado, se estudiarán los procedimientos más utilizados para calcularlo:

1. Dado un porcentaje respecto de una cantidad, encontrar la cantidad resultante. En este caso se utiliza la regla de tres simple o se multiplica directamente la cantidad por el porcentaje, expresado en forma decimal:

EJEMPLO 1.1

Calcular el 10% de 900.

Por la regla de tres simple

$$900 = 100\%$$

$$x = 10\% \quad x = \frac{(900)(10)}{100} = 90$$

Directamente

$$(900)(0,10) = 90$$

2. Dada la cantidad resultante, encontrar el porcentaje respecto de una cantidad. En este caso también se utiliza la regla de tres simple, o se divide la cantidad dada, entre la resultante multiplicada por cien.

EJEMPLO 1.2

¿Qué porcentaje de 500 es 60?

$$\text{a) } \begin{array}{l} 500 = 100\% \\ 60 = x\% \end{array} \quad x = \frac{(60)(100)}{500} = 12\%$$

$$\text{b) } \frac{(60)(100)}{500} = 12\%$$

APLICACIONES

Las aplicaciones más comunes son:

Descuento por compra al contado

Calcular el valor de la factura de venta de una cocina cuyo precio de lista es de S/. 350.000, si se ofrece el 12% de descuento por venta al contado.

Primer procedimiento

S/. 350.000 precio de lista
 -42.000 12% descuento $(350.000)(0,12)$
S/. 308.000 Valor de la factura

Segundo procedimiento

S/. $350.000 (1 - 0,12) =$ S/. 308.000

Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos

Calcular el valor de la factura de venta de un refrigerador cuyo precio de lista es S/. 480.000, con el 15% de descuento por compra al contado, si se aplica el 10% de impuesto a las ventas.

Primer procedimiento

S/. 480.000 precio de lista
 -72.000 15% descuento $(480.000)(0,15)$
S/. 408.000 precio con descuento
 +40.800 impuesto a las ventas $(408.000)(0,10)$
S/. 448.800

Segundo procedimiento

$480.000(1 - 0,15) = 408.000$
 $408.000(1 + 0,10) =$ S/. 448.800

Cálculo de porcentaje del precio de costo

Un comerciante desea obtener una utilidad o beneficio de 20% sobre el precio de costo de un producto que adquirió en S/. 25.000; calcular el precio de venta.

Primer procedimiento

Precio de venta = Precio de costo + utilidad
Precio de venta = $25.000 + 25.000(0,20)$
Precio de venta = $25.000 + 5.000$
Precio de venta = S/.30.000

Segundo procedimiento

$$\text{Precio de venta} = 25.000(1 + 0,20) = \text{S/}. 30.000$$

Es decir, vende con una utilidad de 20% sobre el precio de costo.

Expresar la utilidad hallada en el problema anterior como porcentaje del precio de costo y del precio de venta.

- Porcentaje sobre el precio de costo:
25.000 = 100%

$$5.000 = x \quad x = \frac{(5.000)(100)}{25.000} = 20\%$$

- Porcentaje sobre el precio de venta:
30.000 = 100%

$$5.000 = x \quad x = \frac{(5.000)(100)}{30.000} = 16,67\%$$

Cálculo del porcentaje sobre el precio de venta

Con frecuencia, los comerciantes utilizan este procedimiento para calcular el precio de venta al cliente.

EJEMPLO 1.3

Un comerciante desea vender zapatos que tienen un costo de S/. 35.000 el par, con una utilidad de 25% sobre el precio de venta. Calcular el precio al que puede vender el par.

$$\text{Precio de venta} = \text{Precio de costo} + \text{Utilidad}$$

$$\text{Precio de venta} - \text{Utilidad} = \text{Precio de costo}$$

$$\text{Precio de venta} - [0,25 (\text{Precio de venta})] = 1.200$$

$$\text{PV} (1 - 0,25) = 1.200$$

$$\text{PV} (0,75) = 1.200$$

$$\text{PV} = \frac{1.200}{0,75}$$

$$\text{Precio de venta} = \text{S/}. 1.600$$



DEPRECIACIÓN

*"Es la pérdida de valor de un bien o activo, maquinaria, edificio, equipos, etc., que sufren los bienes o activos debido al uso, desgaste, u otros factores"*².

*"La depreciación es el proceso por el cual un activo disminuye su valor y utilidad con el uso y/o con el tiempo"*³.

Para reemplazar el activo al fin de su vida útil se establece un fondo, separando periódicamente cierta cantidad que debe ser igual al costo del reemplazo al término de la vida útil. Para comprender mejor lo que es depreciación, se presentan algunas definiciones de los elementos que intervienen en ella:

Vida útil

Es la duración probable de un bien o activo; se estima con base en la experiencia e informes de expertos o fabricantes.

Costo inicial

Valor del bien o activo en la fecha de compra.

Valor de salvamento o valor residual

Valor que conserva el bien cuando ha dejado de ser útil.

Cargo por depreciación

Depósitos periódicos que se realizan en el fondo para depreciación.

MÉTODOS DE DEPRECIACIÓN

Existen diferentes métodos de depreciación.

Métodos de depreciación contables

De acuerdo con la legislación vigente, son fáciles de aplicar, no toman en cuenta los costos financieros ni la inflación, y son en moneda corriente:

- Método uniforme o de línea recta.
- Método de depreciación por unidad de producción.
- Método fondo de amortización.
- Método de la suma de los enteros que corresponden a los años de duración del bien o de la suma de dígitos decreciente.
- Método de depreciación por porcentaje fijo.

2. Lincoyán Portus Govinden. *Matemáticas financieras*. Ed. McGraw-Hill. Bogotá - Colombia, 1975, 1a. edición, pp. 190-196.

3. Celio Vega O. *Ingeniería económica*. Ed. Gráficas Mediavilla Hnos. Quito-Ecuador, 1983, p. 10.

- Método de depreciación con intereses sobre la inversión.
- Agotamiento por unidad de producción.

Métodos de depreciación económica

Estos métodos tratan de determinar el valor de la depreciación que recupere el capital invertido en los activos y genere los fondos suficientes para reponerlos cuando sea conveniente a los precios vigentes en el mercado.

Sus principales características son:

- Relativamente complicados de aplicar.
- Toman en cuenta los costos de capital de la empresa, la inflación, el precio de reposición de los equipos.
- Reflejan la realidad económica de la empresa.
- Aconsejables en la toma de decisiones de la empresa⁴.

Estos métodos de depreciación económica, a pesar de ser más complicados, presentan valores más reales y permiten tomar previsiones justas para el remplazo de los equipos o bienes. Para efectuar los cálculos utilizan la tasa de inflación, los valores reales, las tasas de impuestos, la tasa de interés, el costo del activo y el valor residual, entre las principales variables. En este texto no se estudiarán los métodos de depreciación económica puesto que corresponden al contenido de otras materias afines.

Sin restar mérito a ninguno de ellos, pues todos son importantes y aplicables a diferentes tipos de análisis, se estudiarán los métodos de depreciación contables, en especial el primero por ser el de mayor uso.

Método de depreciación en línea recta

Supone que la depreciación anual es la misma para toda la vida útil, y en consecuencia se reservan cada año valores iguales de manera que, al finalizar la vida útil, se tenga un fondo de reserva que, sumado al valor de salvamento del bien, alcance para su reposición.

“Este método consiste en tomar cada año, para el activo considerado, un valor de depreciación constante”⁵.

El valor del depósito anual o cargo por depreciación puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (vs)}}{\text{Número de años de vida útil (N)}}$$

Esta fórmula se utiliza en el caso de que la depreciación esté dada en función del número de años.

4. *Ibid.* p. 15.

5. *Ibid.* p. 16.

Cuando la depreciación se calcula en función de las horas de operación, puede utilizarse la fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (vs)}}{\text{Número de horas de vida útil (N)}}$$

Cuando la depreciación se calcula en función del número de unidades producidas, puede utilizarse la siguiente fórmula:

$$\text{Cargo por depreciación (CD)} = \frac{\text{Costo inicial (CI)} - \text{Valor salvamento (vs)}}{\text{Número de unidades de vida útil (N)}}$$

Es decir, que únicamente cambia el denominador N, dependiendo de si la depreciación está dada en función de los años, el número de horas o las unidades producidas.

EJEMPLO 1.4

Calcular el cargo por depreciación anual de una máquina que costó S/. 25.000.000, si su vida útil se estima en 10 años y su valor de salvamento en 10% de su valor original.
 $(25.000.000)(0,10) = 2.500.000$ (valor de salvamento)

$$\text{CD} = \frac{25.000.000 - 2.500.000}{10} = 2.250.000$$

Podemos elaborar una tabla donde se exprese el valor en libros contables:

Tiempo	Cargo por depreciación	Fondo para depreciación	Valor en libros al final del año
			25.000.000
1	2.250.000	2.250.000	22.750.000
2	2.250.000	4.500.000	20.500.000
3	2.250.000	6.750.000	18.250.000
4	2.250.000	9.000.000	16.000.000
5	2.250.000	11.250.000	13.750.000
6	2.250.000	13.500.000	11.500.000
7	2.250.000	15.750.000	9.250.000
8	2.250.000	18.000.000	7.000.000
9	2.250.000	20.250.000	4.750.000
10	2.250.000	22.500.000	2.500.000

En la tabla se observa que el fondo para depreciación se incrementa anualmente hasta alcanzar el valor requerido para remplazar la maquinaria; en cambio, el valor en libros va disminuyendo hasta llegar al valor de salvamento o residual.

EJEMPLO 1.5

Una maquinaria industrial tuvo un costo inicial de S/. 1.400.000 y el valor de salvamento se calcula en S/. 200.000 después de producir 6.000.000 de unidades. Calcular el cargo por depreciación anual y elaborar la tabla de depreciación, si la producción anual se estima en 750.000 unidades.

$$CD = \frac{1.400.000 - 200.000}{6.000.000} = 0,20$$

S/. 0,20 por unidad

Anualmente se tiene: $(0,20)(750.000) = \text{S/. } 150.000$

Tiempo	Unidades producidas	Cargo por depreciación	Fondo para depreciación	Valor en libros
1	750.000	150.000	150.000	1.400.000
2	750.000	150.000	300.000	1.250.000
3	750.000	150.000	450.000	1.100.000
4	750.000	150.000	600.000	950.000
5	750.000	150.000	750.000	800.000
6	750.000	150.000	900.000	650.000
7	750.000	150.000	1.050.000	500.000
8	750.000	150.000	1.200.000	350.000
				200.000

En la práctica, puede variar el número de unidades producidas en el año; en ese caso debe multiplicarse el número de unidades por el cargo por depreciación unitaria y efectuar las sumas y restas en las columnas Fondo para depreciación y Valor en libros respectivamente.

EJEMPLO 1.6

A una maquinaria cuyo costo fue S/. 2.400.000 se le estima un valor de salvamento de S/. 200.000 luego de 50.000 horas de operación. Calcular el cargo por depreciación anual y elaborar una tabla.

$$CD = \frac{2.400.000 - 200.000}{50.000} = \text{S/. } 44$$

5.000 horas al año por 44 = S/. 220.000 anuales.

Años	Horas de operación	Cargo por depreciación	Fondo para depreciación	Valor en libros
				2.400.000
1	5.000	220.000	220.000	2.180.000
2	4.000	176.000	396.000	2.004.000
3	6.000	264.000	660.000	1.740.000
4	5.000	220.000	880.000	1.520.000
5	3.000	132.000	1.012.000	1.388.000
6	5.000	220.000	1.232.000	1.168.000
7	6.000	264.000	1.496.000	904.000
8	5.000	220.000	1.716.000	684.000
9	6.000	264.000	1.980.000	420.000
10	5.000	220.000	2.200.000	200.000

AGOTAMIENTO

Es la pérdida progresiva de un activo o bien debida a la reducción de su cantidad aprovechable. Ejemplo: petróleo, minerales.

"El agotamiento básicamente tiene el mismo objetivo que la depreciación, con la diferencia que se aplica a los yacimientos de recursos naturales no renovables"⁶.

Fondo de depreciación

Cantidad que se va formando mediante depósitos periódicos para remplazar el bien.

Caída en desuso u obsolescencia

Cuando en razón de los avances de la técnica se inventan nuevos equipos más económicos, rápidos y productivos, y quedan obsoletos los que estaban en uso. Ejemplo: equipos de computación.

LOGARITMOS

De los logaritmos se estudiará la parte que tiene aplicación en la resolución de problemas de matemáticas financieras y, de ella, los que aun si se utilizan calculadoras electrónicas de bolsillo no pueden resolverse directamente y requieren explicación.

La razón de exponer los logaritmos de esta manera es por la práctica y facilidad actual de utilizar calculadoras, sin necesidad de revisar conceptos que, se supone, el estudiante y el lector ya dominan.

6. *Ibid.* p. 14.

CÁLCULO DE n E i

Así, el cálculo de $(1 + i)^n$, que contiene dos variables i y n , exige la aplicación de logaritmos puesto que de otra manera puede ser difícil obtenerlo.

Más adelante se estudiará que la variable i significa tasa de interés y n número de periodos. Es importante saber cuándo aplicar los logaritmos y cuándo utilizar las calculadoras electrónicas.

Dentro de la metodología de los logaritmos es bueno explicar la esencia de sus elementos, así:

El logaritmo en base b de un número positivo N ($\log_b N$) es el exponente L , de modo que $b^L = N$.

EJEMPLO 1.7

El logaritmo de 100 en base 10 es igual a 2.

$$\log_{10} 100 = 2, \text{ porque } 10^2 = 100$$

EJEMPLO 1.8

El logaritmo de 32 en el sistema de base 2 es 5.

$$\log_2 32 = 5, \text{ porque } 2^5 = 32$$

Todo logaritmo tiene una parte entera llamada característica y una parte decimal llamada mantisa.

EJEMPLO 1.9

Un logaritmo en base 10.

$$\log 225 = 2,352183, \text{ en el que 2 es la característica y 0,352183, la mantisa.}$$

En el texto se utilizarán los logaritmos vulgares o de base 10.

Es necesario tener presente las siguientes definiciones elementales:

- El logaritmo de un producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.
 $\log(A)(B) = \log A + \log B$
- El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.
 $\log A/B = \log A - \log B$
- El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.
 $\log A^n = n \log A$
- El cologaritmo de un número es igual al logaritmo de su recíproco; se expresa como "colog". Se utiliza para calcular el logaritmo de un número decimal menor que 1, o cuando el signo menos aparece delante de un logaritmo.

EJEMPLO 1.10

$$\log 0,25 = -1 + 0,397940$$

se calcula el cologaritmo:

Se suma 1 a la característica y se resta 1 a la mantisa para obtener $= -0,602060$

Con la calculadora electrónica el resultado es directo $\log 0,25 = -0,602060$

Es recomendable realizar todas las operaciones aritméticas antes de aplicar logaritmos; así se simplifica el problema.

EJEMPLO 1.11

Calcular i

$$(1 + i)^{18} = 3,379932$$

Se aplican logaritmos a los dos miembros:

$$\log(1 + i)^{18} = \log 3,379932$$

El logaritmo de la potencia de una cantidad es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad.

$$18 \log(1 + i) = \log 3,379932$$

$$\log(1 + i) = \frac{\log 3,379932}{18}$$

$$\log(1 + i) = \frac{0,528907962}{18}$$

$$\log(1 + i) = 0,0293837$$

$$(1 + i) = \text{antilog} 0,0293837$$

Se obtiene el antilogaritmo para encontrar el número.

$$(1 + i) = 1,07$$

$$i = 1,07 - 1$$

$$i = 0,07$$

Respuesta $i = 7\%$

Igualmente, sin utilizar logaritmos, mediante calculadora elevando a la potencia $1/18$ ambos miembros, se puede obtener la respuesta:

$$(1 + i)^{18/18} = 3,379932^{1/18}$$

$$1 + i = 1,07$$

$$i = 1,07 - 1;$$

$$i = 0,07;$$

$$i = 7\%$$

EJEMPLO 1.12

Calcular i para:

$$48,25 (1 + i)^{-20} = \frac{478,48473}{42,15} - 1$$

$$48,25 (1 + i)^{-20} = 11,351951 - 1$$

$$(1 + i)^{-20} = \frac{10,351951}{48,25}$$

$$(1 + i)^{-20} = 0,214548$$

Al aplicar logaritmos:

$$\log(1 + i)^{-20} = \log 0,214548$$

$$-20 \log(1 + i) = \log 0,214548$$

$$\log(1 + i) = \frac{\log 0,214548}{-20}$$

$$\log(1 + i) = \frac{-0,668475}{-20}$$

$$\log(1 + i) = 0,033423$$

$$1 + i = \text{antilog} 0,033423$$

$$i = 1,08$$

$$i = 1,08 - 1$$

$$i = 0,08$$

$$i = 8\%$$

Utilizando la calculadora:

$$(1 + i)^{-20/20} = (0,214548)^{1/20}$$

$$(1 + i)^{-1} = 0,925925$$

$$\frac{1}{1 + i} = 0,925925$$

$$1 + i = \frac{1}{0,925925}$$

$$i = 0,08$$

$$i = 8 \%$$

EJEMPLO 1.13

Calcular n

$$(1 + 0,05)^{-n} = 0,014339$$

Al aplicar logaritmos:

$$\log(1,05)^{-n} = \log 0,014339$$

$$-n \log(1,05) = \log 0,014339$$

$$-n = \frac{\log 0,014339}{\log 1,05}$$

$$-n = \frac{-1,843469}{0,021189}$$

Multiplicamos por (-1) :

$$n = \frac{1,843469}{0,021189} = 87$$

$n = 87$ periodos; no es necesario hallar antilogaritmos ya que n es el exponente.

Nota. Anteriormente, con tablas de logaritmos se calculaba así:

$$\log(1,05)^{-n} = \log 0,014339$$

$$-n \log(1,05) = \log 0,014339$$

(multiplicando por -1 ambos miembros)

$$n \log(1,05) = -\log 0,014339$$

$$n = \frac{\text{colog } 0,014339}{\log 1,05}$$

$$\text{colog } 0,01433940 = \overline{2},156530$$

sumando $+1$ a la característica, cambiándole el signo y restando de 1 la mantisa.

$$\text{colog } \overline{2},1565309 = 1,843469$$

$$n = \frac{1,843469}{0,021189} = 87$$

EJEMPLO 1.14

Calcular n :

$$\begin{aligned}\frac{(1,02)^n - 0,897096}{0,11} &= 91,909667 - 2,20 \\ (1,02)^n - 0,897096 &= (91,909667 - 2,20)(0,11) \\ (1,02)^n &= (89,709667) 0,11 + 0,897096 \\ (1,02)^n &= 9,868063 + 0,897096 \\ (1,02)^n &= 10,76513\end{aligned}$$

Obtenemos logaritmos:

$$\begin{aligned}\log(1,02)^n &= \log 10,76513 \\ n \log(1,02) &= \log 10,76513 \\ n &= \frac{\log 10,76513}{\log 1,02} \\ n &= \frac{1,0320205}{0,00860017} = 120 \text{ periodos}\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.15

Calcular n :

$$\begin{aligned}(1,017)^n &= 5,20 \\ n \log(1,017) &= \log 5,20 \\ n &= \frac{\log 5,20}{\log 1,017} \\ n &= \frac{0,716003}{0,007320} = 97,8 \text{ periodos}\end{aligned}$$

PROGRESIONES

Con un criterio similar al expuesto sobre logaritmos, se estudiarán brevemente las progresiones y su aplicación a matemáticas financieras.

Son una serie de números o términos algebraicos en la que cada término posterior al primero puede obtenerse del anterior; sumándole, multiplicándole o dividiéndole por una diferencia o razón común.



En este texto las progresiones se agrupan en 3 categorías:

- a) progresiones aritméticas;
- b) progresiones geométricas;
- c) progresiones geométricas infinitas.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es una sucesión de números, llamados términos, en la que cualquier término posterior al primero puede obtenerse del anterior, sumándole (o restándole) un número constante llamado diferencia común (d).

EJEMPLO 1.16

4; 8; 12; 16; 20; ... la diferencia común es 4

80; 74; 68; 62; ... la diferencia común es -6

Obsérvese la progresión:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + a + (n - 1)d$$

En la que a es el primer término, d la diferencia común y n el número de términos.

Cada término se forma sumando al primero la diferencia común, tantas veces como número de términos "menos uno" se busque.

El último término buscado está en función del número de términos n .

$$U = a + (n - 1)d \text{ (fórmula del último término de una progresión aritmética)} \quad (1.1)$$

U = último término

a = primer término

n = número de términos

d = diferencia común

EJEMPLO 1.17

Encontrar el vigésimo término de la progresión aritmética:

115, 112, 109, 106 ...

Utilizamos la fórmula $U = a + (n - 1)d$

En donde $a = 115$; $n = 20$; $d = -3$

$$U = 115 + (20 - 1)(-3)$$

$$U = 115 + (19)(-3)$$

$$U = 115 - 57 = 58$$

Suma de una progresión aritmética

La suma de una progresión aritmética puede hallarse mediante una fórmula, cuya deducción se presenta a continuación.

Sea la progresión aritmética

$$a; a + d; a + 2d; a + 3d; \dots a + (n - 2)d, a + (n - 1)d$$

totalizando, se puede escribir

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) \dots + (u - 2d) + (u - d) + u \quad (1)$$

Reordenando:

$$S = u + (u - d) + (u - 2d) \dots (a + 2d) + (a + d) + a \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$2S = (a + u) + (a + u) + (a + u) + \dots (a + u) + (a + u) + (a + u)$$

En consecuencia, la fórmula de la suma de términos de una progresión aritmética es

$$2S = n(a + u)$$

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

(La suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la mitad del número de términos multiplicada por la suma del primero más el último término). (1.2)

EJEMPLO 1.18

Encontrar la suma de los treinta primeros términos de la progresión aritmética

15; 21; 27; 33;...

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

Es necesario calcular el último término.

$$a = 15; n = 30; d = 6; u = ?$$

$$u = a + (n - 1) d$$

$$u = 15 + (30 - 1)(6)$$

$$u = 15 + 174$$

$$u = 189$$

$$S = \frac{30}{2} (15 + 189)$$

$$S = 15 (15 + 189)$$

$$S = 15 (204)$$

$$S = 3.060$$

EJEMPLO 1.19

Por la compra de un terreno una persona paga al final del primer año, S/. 500.000, al final del segundo año, S/. 450.000; al final del tercer año, S/. 400.000. ¿Cuánto pagará por el terreno si hace 10 pagos?

500.000; 450.000; 400.000; ... es una progresión aritmética cuya razón es 50.000

$$u = 1 + (n - 1) d$$

$$u = 500.000 + (9)(-50.000) = 50.000$$

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

$$S = \frac{10}{2} (500.000 + 50.000) = S/. 2.750.000$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

"Es una sucesión de números tales que cada uno de ellos se deduce del anterior multiplicándolo o dividiéndolo por una cantidad constante llamada razón"⁷.

EJEMPLO 1.20

980; 490; 245; 122.5; 61.25; ... es una progresión geométrica descendente cuya razón es 0,5.

EJEMPLO 1.21

3; 9; 27; 81 ... es una progresión geométrica ascendente cuya razón es 3.

Último término de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica

$$a; ar; ar^2; ar^3; ar^4; ar^5; ar^6; \dots$$

el último término, cualquiera que éste fuere, será igual a: ar^{n-1}

Si se quiere encontrar el término 10, será:

$$u = ar^{10-1} = ar^9$$

Entonces puede afirmarse que el último término de una progresión geométrica se halla mediante la fórmula $u = ar^{n-1}$ (1.3)

donde: u = último término; a = primer término; r = razón común;

n = número de términos.

Suma de una progresión geométrica

Sea la progresión

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad (1)$$

Al multiplicar por (r) ambos miembros:

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$$

7. Gran diccionario enciclopédico universal. Ed. Alfredo Ortells. Valencia-España, 1980.

Restando (2) de (1)

$$S - Sr = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + (ar^3 - ar^3) + \dots (ar^{n-2} - ar^{n-2}) + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n$$

Simplificando:

$$S(1 - r) = a - ar^n$$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} \quad r < 1$$

(Fórmula para la suma de una progresión geométrica cuya razón es menor que 1) (1.4)

Multiplicando por -1 se obtiene la fórmula para la suma de una progresión geométrica cuya razón es mayor que 1:

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1} \quad r > 1$$

EJEMPLO 1.22

Encontrar el término 10 y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica

1.000; 1.500; 2.250; 3.375; ...

$$r = 1,5$$

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 1.000 (1,5)^{10-1}$$

$$u = 1.000 (1,5)^9 = 1.000 (38.443,359)$$

$$u = 38.443,359$$

Término 10 de la progresión.

Se aplica la fórmula cuya razón es mayor que 1:

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1} = \frac{1.000 (1,5)^{10} - 1.000}{1,5 - 1}$$

$$S = \frac{57.665,039 - 1.000}{0,5} = 113.330,08$$

EJEMPLO 1.23

Encontrar el término 10 y la suma de los primeros 10 términos de la progresión geométrica

100; 50; 25; ...

$$r = 0,50$$

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 100 (0,50)^9 = 0,195312$$

$$a - ar^n$$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Utilizamos esta fórmula puesto que la razón es menor que 1.

$$S = \frac{100 - 100 (0,50)^{10}}{1 - 0,50} = \frac{100 - 0,097656}{0,50}$$

$$S = \frac{99,902344}{0,50} = 199,80469$$

EJEMPLO 1.24

En el día de hoy cierta maquinaria tiene un valor de S/. 15.000.000. Si al final de cada año se deprecia en 15%, ¿cuál será su valor después de 10 años?

Valor inicial: S/. 15.000.000

Final del primer año:

$$15.000.000 - 15.000.000 (0,15)$$

$$15.000.000 (1 - 0,15) = 15.000.000 (0,85)$$

Final del segundo año:

$$15.000.000 (0,85) - 15.000.000 (0,85) (0,15) =$$

$$15.000.000 (0,85) (1 - 0,15) = 15.000.000 (0,85)^2$$

Final del tercer año:

$$15.000.000 (0,85)^3$$

Se puede escribir la progresión geométrica

$$15.000.000 + 15.000.000(0,85) + 15.000.000(0,85)^2 + 15.000.000 (0,85)^3 \dots$$

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 15.000.000 (0,85)^9 = 15.000.000 (0,2316169)$$

$$u = 3.474.254,19$$

valor al final del décimo año.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INFINITA

Es aquel tipo de progresión geométrica cuya razón es menor que 1, el número de términos es ilimitado, pero la suma de sus términos es cuantificable.

EJEMPLO 1.25

La progresión

$$1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \dots$$

Cuya razón es 1/5 y el número de términos ilimitado.

Consecuentemente, no hay último término; pero sí puede calcularse la suma de sus términos. En seguida se presenta la demostración:

La fórmula de la suma de una progresión geométrica cuya razón es menor que 1 es:

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

(separando en dos quebrados con el mismo denominador) (1.5)

$$S = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^n}{1 - r} = 0$$

$$a = 1; r = \frac{1}{5}; n = \infty$$

Se puede dar valores a n :

Cuando $n = 10$

$$\frac{1(0,20)^{10}}{1 - 0,20} = 0,000000128 = (1,28)(10^{-7})$$

Cuando $n = 50$

$$\frac{1(0,20)^{50}}{1 - 0,20} = (1,40737)(10^{-35})$$

Cuando $n = 100$

$$\frac{1(0,20)^{100}}{1 - 0,20} = (1,58456)(10^{-70})$$

Se puede notar que cuanto mayor es n , $\frac{ar^n}{1 - r}$ tiende a cero; entonces puede decirse que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^n}{1 - r} = 0$$

Luego, la suma de una progresión geométrica infinita puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Al aplicar esta fórmula en la progresión $1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \dots$

Cuya razón es $1/5$ y el número de términos ilimitado

$$S = \frac{1}{1 - 0,20} = \frac{1}{0,80} = 1,25$$

EJEMPLO 1.26

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$

$$a = \frac{1}{2}; r = 0,5; n = \infty$$

$$S = \frac{1}{1 - 0,50} = \frac{1}{0,50} = 2$$

ECUACIONES

Se sugiere al lector revisar en matemáticas básicas el tema referente a ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones con 1, 2 ó 3 incógnitas y ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, se realizará una breve revisión de las principales ecuaciones que podrían utilizarse en el presente texto:

EJEMPLO 1.27

Ecuaciones de primer grado:

$$8x + \frac{2}{3}x = 24 + \frac{2}{3}x$$

$$8x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x = 24$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8} \quad x = 3$$

Sistemas de ecuaciones

$$(1) 3x - 2y = 60$$

$$(2) 6x + 4y = 24$$

Se multiplica por dos la primera ecuación para igualar los términos.

Efectuando la suma, se tiene:

$$6x - 4y = 120$$

$$6x + 4y = 24$$

$$\hline 12x \quad \quad = 144$$

$$x = \frac{144}{12} = 12$$

Reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} 3(12) - 2(y) &= 60 \\ 36 - 2y &= 60 \\ -2y &= 60 - 36 \\ -2y &= +24 \\ y &= \frac{24}{-2} = -12 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3(12) - 2(-12) &= 60 \\ 36 + 24 &= 60 \\ 60 &= 60 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.28

Ecuaciones de segundo grado:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

Primera solución:

$$x = \frac{-1 + 5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Segunda solución:

$$x = \frac{-1 - 5}{4} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. a) 5% de 500 | d) $11\frac{1}{16}$ % de 20.000 |
| b) $5\frac{1}{2}$ % de 800 | e) $8\frac{1}{4}$ % de 25.000 |
| c) $7\frac{1}{8}$ % de 1.000 | f) $50\frac{1}{2}$ % de 30.000 |

g) 200% de 48.000

i) $0,5 \frac{1}{8} \%$ de 1.000.000h) $315 \frac{1}{16} \%$ de 200j) $9 \frac{2}{8} \%$ de 10.000**Respuestas**

- a) 25 b) 44 c) 71,25 d) 2.212,50 e) 2.062,50
 f) 15.150 g) 96.000 h) 630,125 i) 6,250 j) 925

2. ¿Qué porcentaje de

- a) 500 es 25? b) 800 es 44? c) 1.000 es 71,25?
 d) 20.000 es 2.212,50? e) 200 es 500? f) 0,25 es 0,005?

Respuestas

- a) 5% b) $5 \frac{1}{2} \%$ c) $7 \frac{1}{8} \%$ d) $11 \frac{1}{16} \%$ e) 250% f) 2%

3. ¿De qué cantidad es

- a) 15 el 20%? b) 80 el 0,5%? c) 4.300 el $9 \frac{1}{8} \%$?
 d) 820 el $11 \frac{1}{16} \%$? e) 1,15 el 25%? f) 25.000 el 20,4%?

Respuestas

- a) 75 b) 16.000 c) 47.448,2759
 d) 7.370,7865 e) 4,6 f) 122.549,02

4. Una empresa ofrece a la venta refrigeradores cuyo precio de lista es S/. 650.000, con un descuento de 12% por venta al contado y con el 5% de impuesto a las ventas. **a)** Calcular el valor de la factura a pagar; **b)** calcular el descuento efectivo; **c)** calcular el porcentaje efectivo que beneficia al cliente.

Respuestas

- a) 600.600 b) 49.400 c) 7,6%

5. Una distribuidora comercial ofrece en promoción cocinas cuyo precio de lista es de S/. 2.000.000 con un descuento del $15 \frac{1}{8} \%$ por venta al contado, pero aplica el 5% de impuesto a las ventas sobre el precio de lista. **a)** Calcular el valor de la factura a pagar; **b)** el descuento efectivo; **c)** el porcentaje real que se aplica al cliente.

Respuestas

- a) 1.782.375 b) 217.625 c) 10,881250%

6. Un comerciante compra mercadería por un valor de S/. 180.000 y la vende en S/. 270.000. **a)** Calcular la utilidad; **b)** el porcentaje de ésta en relación con el precio de costo; **c)** el porcentaje en relación con el precio de venta.

Respuestas

a) 90.000 **b)** 50% **c)** 33,33%

7. Una empresa compra 200 millones de barriles de petróleo a S/. 1.000 el barril.
a) Calcular el costo de la misma cantidad de barriles de petróleo a S/. 1.200 el barril;
b) expresar en porcentaje el aumento del precio de costo; **c)** expresar en porcentaje el aumento del precio de venta.

Respuestas

a) S/. 240 millones **b)** 20% **c)** 16,67%

8. Una empresa distribuidora de gas compra este producto a S/. 20 el kilogramo y lo vende con una utilidad del 25 1/2% del precio de costo. Calcular el precio de venta del kg de gas.

Respuesta

S/. 25,10

9. Una distribuidora de gasolina compra este producto a S/. 3.000 el galón y lo vende con una utilidad del 20% del precio de venta. Calcular este precio.

Respuesta

S/. 3.750

10. Calcular el cargo por depreciación anual de un equipo cuyo costo fue S/. 3.200.000, si su vida útil se estima en 12 años y su valor de salvamento en el 15% de su valor original. Elaborar una tabla en la que se exprese el valor en los libros contables.

Respuesta

S/. 226.666,67

11. Una maquinaria industrial tiene un costo inicial de S/. 1.600.000 y un valor estimado de rescate de S/. 200.000; después de producir 5.000.000 de unidades, calcular:
a) El cargo por depreciación por unidad; **b)** anual; **c)** elaborar la tabla de depreciación. Considerar la producción promedio en 500.000 unidades por año.

Respuestas

a) S/. 0,28 por unidad **b)** S/. 140.000



12. Una máquina cuyo costo inicial fue S/. 2.800.000 se le estima un valor de rescate del 10% luego de 80 mil horas de operación. Calcular: **a)** El cargo por depreciación: por hora; anual; **b)** elaborar una tabla. Considerar un promedio de 4.000 horas de operación al año.

Respuesta

a) S/. 31,50 por hora; S/. 126.000 anual.

13. Calcular i :

- a)** $(1 + i)^{115} = 2,147109$ **d)** $3,24 + (1 + i)^{50} = 6,345242 - 1$
b) $(1 + i)^{70} = 3,999558$ **e)** $(1 + i)^{35} = 28,666723$
c) $(1 + i)^{-75} = 0,042783$

Respuestas

- a)** $i = 2/3\%$ **b)** $i = 2\%$ **c)** $i = 4,29\%$ **d)** $i = 1\ 1/2\%$ **e)** $i = 10\ 1/16\%$

14. Calcular n :

- a)** $(1 + 0,05)^n = 63,254353$ **d)** $(1 + 0,081222)^n = 0,0000841$
b) $(1 + 0,0125)^n = 2,107181$ **e)** $(1 + 0,12125)^n = 0,001041$
c) $(1 + 0,09125)^n = 158,345924$

Respuestas

- a)** $n = 85$ **b)** $n = 60$ **c)** $n = 58$ **d)** $n = -120$ **e)** $n = -60$

15. Encontrar el término 20 y la suma de los 20 primeros términos de las progresiones:

- a)** 3; 5; 7; 9;... **b)** 0; 1/2; 1; 1 1/2;... **c)** -75; -60; -45;... **d)** -2; -2 3/4; -3 2/4;...
e) 3; -1; -5;... **f)** 0; -3; -6;... **g)** -3; -2, 4; -1,8;... **h)** 0; 3x; 6x;... **i)** $x - 6x; -12x; \dots$

Respuestas

- a)** 41 y 440 **b)** $9\ 1/2$ y 95 **c)** 210 y 1.350 **d)** $16\ 1/4$ y $182\ 1/2$ **e)** -73 y 700
f) -57 y -570 **g)** 8,4 y 54 **h)** $57x$ y $570x$ **i)** $-113x$ y $1.120x$.

16. Una empresa desea la estabilidad de sus empleados y mantiene una política de incremento de salarios. Si el salario inicial de un nuevo empleado es de S/. 960.000 y se considera un incremento anual de S/. 380.000. ¿Cuál será el sueldo de un empleado después de 15 años?

Respuesta

S/. 6.280.000

17. Una comercializadora tiene 12.750 clientes. Con un nuevo programa de ventas espera incrementar este número en 250 cada año. ¿Cuántos clientes tendrá después de 10 años?

Respuesta

15.250 clientes.

18. Una persona se compromete a pagar en forma ascendente durante 24 meses una deuda por la compra de un automóvil: el primer pago, S/. 8.000; el segundo, S/. 8.400; el tercero, S/. 8.800 y así sucesivamente. ¿Cuánto habrá pagado en total durante los 24 meses?

Respuesta

S/. 302.400

19. Encontrar el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:
a) 2; 4; 8; 16;... b) -2; -6; -18;... c) -2; 4; -8; 16;... d) 1; 2; 4; 8;... e) 1; 3; 9;...

Respuestas

- a) 1.024 y 2.046 b) -39.366 y -59.048 c) 1.024 y 682
d) 512 y 1.023 e) 19.683 y 29.524,5

20. Una empresa tiene ventas de S/. 500.000 anuales y desea incrementar el 12% anualmente. ¿Cuánto venderá al inicio del año 12?

Respuesta

S/. 1.739.275

21. Encontrar la suma de las siguientes progresiones geométricas infinitas:

- a) 2; 1; 0,5; ... b) $1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \dots$ c) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \dots$

Respuestas

- a) 4 b) 1,25 c) 1,3333

22. El monto de un depósito después de n años, cuando el interés es compuesto, está dado por la fórmula $C(1+i)^n$. Si i es la tasa de interés y C es el capital inicial depositado: a) Encontrar los primeros tres términos de la progresión; b) ¿Cuál es la razón?

Respuestas

- a) $C; C(1+i); C(1+i)^2;$ b) $(1+i)$

23. Si una persona deposita S/. 50.000 al 12% de interés compuesto acumulable anualmente, ¿cuánto ha acumulado al finalizar el año 12?

Respuesta

S/. 194.798

24. Supongamos que un documento paga el 9% de interés compuesto anual; si invertimos S/. 187.500 ahora y luego de un tiempo obtenemos S/. 270.000, ¿qué tiempo ha transcurrido?

Respuesta

4,262278 años

AUTOEVALUACIÓN

1. Hallar el 25% de 2.000
2. ¿De qué cantidad es 900 el 30%?
3. ¿Que porcentaje de 8.000 es 50?
4. Un comerciante compra libros a S/. 25.000 y desea venderlos con una utilidad del 35% del precio de costo. Calcular el precio de venta.
5. Un comerciante compra cuadernos a S/. 5.000 y desea venderlos con una utilidad del 45% del precio de venta. Calcular el precio de venta.
6. Calcular i : $(1 + i)^{60} = 10,519627$
7. Calcular n : $(1 + 0,03)^n = 34,710987$
8. Calcular el término 15 y la suma de los 15 primeros términos de la progresión: 8; 15; 22; 29; ...
9. Calcular el término 10 y la suma de los diez primeros términos de la progresión: 9; 27; 81; 243;...
10. Despejar x en la ecuación:
 $(1 + 0,5x) + 8x + 2,5x - 48 = 12 + (1 + 1,5x)$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. $(2.000)(0,25) = 500$

$$\begin{array}{lcl} 2. & 900 & \text{---} 30\% \\ & x & \text{---} 100\% \end{array} \quad x = \frac{(100)(900)}{30} = 3.000$$

$$\begin{array}{lcl} 3. & 8.000 & \text{---} 100\% \\ & 50 & \text{---} x\% \end{array} \quad x = \frac{(50)(100)}{8.000} = 0,625\%$$

$$\begin{aligned} 4. & \text{Precio de venta} = \text{Precio de costo} + \text{Utilidad} \\ & \text{Precio de venta} = 25.000 + (0,35)(25.000) \\ & \text{Precio de venta} = 25.000 + 8.750 \\ & \text{Precio de venta} = \text{S/. } 33.750 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. & \text{Precio de costo} = \text{Precio de venta} - \% \text{ Precio de venta} \\ & 5.000 = PV - 0,45(PV) \\ & 5.000 = PV(0,55) \\ & PV = \frac{5.000}{0,55} = \text{S/. } 9.090,91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. & (1 + i)^{60} = 10,519627 \\ & (1 + i)^{60/60} = (10,519627)^{1/60} \\ & 1 + i = 1,04 \\ & i = 1,04 - 1 \\ & i = 0,04 \\ & i = 4\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. & (1 + 0,03)^n = 34,710987 \\ & n \log(1,03) = \log 34,710987 \\ & n(0,012837) = 1,540467 \\ & n = \frac{1,540467}{0,012837} = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. & u = a + (n - 1)(d) \\ & u = 8 + (15 - 1)(7) \\ & u = 106 \end{aligned}$$

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

$$S = \frac{15}{2} (8 + 106)$$

$$S = 7,5 (114) = 855$$

$$9. \quad u = ar^{n-1}$$
$$u = 9(3)^9 = 177.147$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$$S = \frac{9(3)^{10} - 9}{3 - 1} = 265.716$$

$$10. \quad 1 + 0,5x + 8x - 2,5x - 48 = 12 + 1 + 1,5x$$
$$-47 + 6x = 13 + 1,5x$$
$$4,5x = 60$$

$$x = \frac{60}{4,5} = 13,33$$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Qué es porcentaje?
2. ¿Cómo se expresa el porcentaje en forma decimal?
3. ¿En qué se diferencia el cálculo del precio como porcentaje del precio de costo y como porcentaje del precio de venta?
4. ¿Qué es la depreciación?
5. ¿Cómo se calcula el cargo por depreciación por unidad de producción?
6. Para calcular n en la ecuación $(1 + i)^n = 100$, ¿deben utilizarse logaritmos y antilogaritmos?
7. ¿Qué es una progresión aritmética descendente?
8. ¿Qué es una progresión geométrica ascendente?
9. ¿Cuál es la fórmula de la suma de una progresión aritmética?
10. ¿Cuál es la fórmula de la suma de una progresión geométrica cuya razón es mayor que 1?

Capítulo

INTERÉS SIMPLE

2

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Interés

Tasa de interés (i)

Interés Simple

Formas de calcular el interés simple

Variación del cálculo del interés

Variación de la tasa de interés en función del tiempo

Procedimientos abreviados de cálculo

Cálculo del capital

Cálculo de la tasa de interés

Cálculo del tiempo

Cálculo del monto a interés simple

Cálculo del valor actual a interés simple

Gráfica de tiempos y valores

El interés sobre saldos deudores

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN

En este capítulo se analizarán algunos conceptos o bases conceptuales de lo que significa el interés simple, con sus diferentes variables: capital, tasa de interés, tiempo, valor actual, monto; sus aplicaciones en el ámbito financiero y comercial.





Es necesario que el lector se familiarice con dichos conceptos y con las respectivas fórmulas para su cálculo.

La aplicación del cálculo de interés simple en el medio financiero es permanente, en operaciones de crédito, ahorros, inversiones de corto plazo, préstamos, etc.

OBJETIVO GENERAL

Conocer el cálculo del interés simple en sus modalidades y sus aplicaciones en el ámbito conceptual y financiero.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Cómo calcular el interés simple.
-  Cómo calcular sus variables: capital, tasa de interés, tiempo.
-  Cómo calcular el monto y el valor actual.
-  Realizar ejercicios prácticos de aplicación.

CONDUCTA DE ENTRADA

Seleccionar la respuesta correcta

1. $8\% =$ a) 0,8 b) 0,08 c) 8 d) 80
2. ¿Cuál es el 10% de 200? a) 2 b) 20 c) 0,2
3. ¿De qué cantidad es 30 el 10%? a) 100 b) 300 c) 200
4. ¿Qué porcentaje de 400 es 100? a) 20% b) 30% c) 25%

5. ¿Cuántos días exactos hay entre el 15 de mayo y el 15 de septiembre del mismo año?
a) 123 b) 120 c) 122
6. ¿Cuántos días tiene un año calendario? a) 360 b) 365 c) 366
7. ¿Cuántos días tiene un año bisiesto? a) 366 b) 360 c) 365
8. ¿Cuántos días tiene un año comercial? a) 360 b) 365 c) 366
9. ¿Aproximadamente cuántos días hay entre el 4 de junio y el 4 de diciembre del mismo año? a) 184 b) 183 c) 180
10. ¿Cuántos días comerciales tiene un bimestre? a) 90 b) 180 c) 60

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

- 1) 0,08 2) 20 3) 300 4) 25 5) 12.3
6) 365 7) 366 8) 360 9) 180 10) 60

INTERÉS

Comenzaremos citando algunas definiciones sobre interés:

*"Interés es la cantidad pagada por el uso del dinero obtenido en préstamo o la cantidad producida por la inversión del capital"*¹.

*"El dinero se invierte siempre en forma productiva; es decir, siempre está ganando interés"*².

*"Interés es el alquiler o rédito que se conviene pagar por un dinero tomado en préstamo"*³.

*"Precio del servicio proporcionado por el prestamista al prestatario, pagado por éste último, para conseguir la utilización de cierta suma de dinero durante un periodo determinado"*⁴.

De estas definiciones puede concluirse que el interés está directamente relacionado con la utilización del dinero el cual siempre está produciendo más dinero, en función del tipo de interés y del tiempo. En consecuencia, se puede decir que interés es el valor pagado por el

1. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, pp. 40-41.

2. *Ibid.*

3. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 15.

4. J. C. Y. Bernard y Lewandowski Colli D. *Diccionario económico y financiero*. Ed. Asociación para el Progreso de la Dirección. 3a. ed., Madrid, 1981.

uso del dinero. Por ejemplo: si por invertir S/. 100 obtenemos S/. 15, decimos que estamos ganando el 15% de interés.

TASA DE INTERÉS (i)

"Es la razón del interés devengado al capital en la unidad de tiempo"⁵.

Está dada como un porcentaje o su equivalente; generalmente se toma el año como unidad de tiempo. Se representa por la letra i .

EJEMPLO 2.1

$$i = \frac{\text{Interés}}{\text{Capital}} = \frac{15}{100} = 15\% = 0,15$$

INTERÉS SIMPLE

Cuando un capital genera intereses por un determinado tiempo, al interés producido que se reconoce se le denomina *interés simple*.

FORMAS DE CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE

El interés simple (I) está en función directa del capital (C), la tasa de interés (i) y el tiempo (t). Según esta premisa, el interés simple puede calcularse mediante la fórmula

$$I = C i t \quad (2.1)$$

EJEMPLO 2.2

Calcular el interés simple que gana un capital de S/. 500.000 al 12% anual, del 15 de marzo al 15 de agosto del mismo año.

Antes de resolver el problema, se calcula el tiempo que transcurre entre las dos fechas.

Tiempo exacto		Tiempo aproximado
Marzo	16	15
Abril	30	30
Mayo	31	30
Junio	30	30
Julio	31	30
Agosto	15	15
Total	153	150 días

5. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, pp. 40-41.



(Se calcula tomando una de las dos fechas extremas)

El problema propuesto puede resolverse de cuatro formas:

a) Con el tiempo aproximado y el año comercial:

$$I = (500.000)(0,12) \frac{150}{360} = S/. 25.000$$

b) Con el tiempo exacto y el año comercial:

$$I = (500.000)(0,12) \frac{153}{360} = S/. 25.500$$

c) Con el tiempo aproximado y el año calendario:

$$I = (500.000)(0,12) \frac{150}{365} = S/. 24.657,53$$

d) Con el tiempo exacto y el año calendario:

$$I = (500.000)(0,12) \frac{153}{365} = S/. 25.150,68$$

Como podemos apreciar, el interés más alto se da en el segundo caso, con el tiempo exacto y el año comercial, y equivale a 25.500; mientras que el más bajo está dado en el tercer caso, con el tiempo aproximado y el año calendario, y es igual a 24.657,53. Para operaciones bancarias, el más utilizado es el segundo caso.

Cálculo del número de días

El número de días en el año también puede variar: Año comercial: 360 días. Año calendario: 365 días. Año bisiesto 366 días.

Con esta premisa, el cálculo de días para encontrar el interés ganado puede realizarse en forma aproximada o en forma exacta.

En forma aproximada

Con el objeto de facilitar los cálculos del tiempo, se acostumbra suponer el año de 360 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno; esto se denomina cálculo aproximado del tiempo.

EJEMPLO 2.3

Del 15 de marzo al 15 de junio hay 90 días

Marzo	15	días
Abril	30	días
Mayo	30	días
Junio	15	días
Total	90	días

En forma exacta

Se toma como referencia el número de días calendario, es decir, meses de 30 y 31 días, año de 365 ó 366 días, según corresponda. Como puede observarse, tomando el ejemplo anterior y considerando una de las dos fechas extremas, son 92 días.

Marzo	16	días
Abril	30	días
Mayo	31	días
Junio	15	días
Total	92	días

VARIACIÓN DEL CÁLCULO DEL INTERÉS

El cálculo del interés varía igualmente si tomamos el año de 360, 365 ó 366 días.

Interés exacto

Cuando se divide el tiempo para 365 ó 366 días, si la tasa de interés es anual;

Interés ordinario

Si dividimos el tiempo para 360 días en iguales condiciones.

EJEMPLO 2.4

Calcular el interés exacto y ordinario de un capital de S/. 20.000 al 9% de interés anual, del 10 de abril al 15 de septiembre del mismo año.

a) Interés exacto, con tiempo exacto:

$$I = (20.000)(0,09) \frac{158}{365} = \text{S/. } 779,18$$

b) Interés exacto, con tiempo aproximado*:

$$I = (20.000)(0,09) \frac{155}{365} = \text{S/. } 764,38$$

c) Interés ordinario con tiempo exacto:

$$I = (20.000)(0,09) \frac{158}{360} = \text{S/. } 790$$

* Como puede notarse, el mayor interés se obtiene con el tiempo exacto y el año comercial de 360 días.

- d) Interés ordinario con tiempo aproximado:

$$I = (20.000)(0,09) \frac{155}{360} = S/. 775$$

VARIACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Entre las tasas de interés más empleadas se hallan la anual, semestral, cuatrimestral, trimestral, bimestral, mensual o diaria.

- a) La tasa de interés anual se utiliza para el tiempo exacto o aproximado: 365 ó 360 días, respectivamente.

EJEMPLO 2.5

Calcular el interés que gana un capital de S/. 100.000 al 12% de interés anual durante 180 días.

$$I = (100.000)(0,12) \frac{180}{360} = S/. 6.000$$

- b) La tasa de interés semestral se utiliza para el tiempo de 180, 181, 182 ó 184 días del semestre (primer o segundo semestre del año).

EJEMPLO 2.6

Calcular el interés que gana un capital de S/. 100.000 al 6% de interés semestral durante 180 días.

$$I = (100.000)(0,06) \frac{180}{180} = S/. 6.000$$

- c) La tasa de interés trimestral se utiliza para el tiempo de 90, 91 ó 92 días.

EJEMPLO 2.7

Calcular el interés que gana un capital de S/. 100.000 al 3% de interés trimestral durante 180 días.

$$I = (100.000)(0,03) \frac{180}{90} = S/. 6.000$$

- d) La tasa de interés mensual se utiliza para el tiempo de 30 ó 31 días del mes.

EJEMPLO 2.8

Calcular el interés que gana un capital de S/. 100.000 al 1% de interés mensual durante 180 días.

$$I = (100.000)(0,01) \frac{180}{30} = S/. 6.000$$

e) La tasa de interés diaria se utiliza directamente.

EJEMPLO 2.9

Calcular el interés que gana un capital de S/. 100.000 al 0,03333333% de interés diario durante 180 días.

$$I = (100.000)(0,000333)(180) = S/. 6.000$$

Como puede notarse, la tasa de interés siempre debe estar en la misma relación del tiempo; generalmente, si la tasa es anual, el tiempo estará dividido en 360 días; si es semestral 180 días; si es trimestral, 90 días; si es mensual, 30 días, y si es diario, un día. Es necesario relacionar la tasa de interés–tiempo para evitar errores de cálculo.

PROCEDIMIENTOS ABREVIADOS DE CÁLCULO

Existen igualmente procedimientos abreviados de cálculo para estimar el interés, de acuerdo con la fórmula básica, los cuales se denominan multiplicadores y divisores fijos.

Multiplicadores fijos

Utilizan la tasa de interés dividida para 36.000 ó 36.500, 18.000 ó 3.000 si es anual, semestral o mensual.

Tomamos como referencia la fórmula básica del interés simple:

$$I = (C)(i)(t) = C \left(\frac{i}{(100)(360)} \right) (t)$$

$$I = (C)(t) \frac{i}{36.000}$$

El factor de interés simple será: $\frac{i}{36.000}$ por día;

Si $i = 12\%$, se tiene: $\frac{12}{36.000} = 0,000333$

EJEMPLO 2.10

Un capital de S/. 1 al 12% de interés anual, ¿qué interés gana en: a) 1 día? b) 2 días? c) 10 días? d) 180 días?

a) $I = (1)(12) \frac{1}{36.000} = S/. 0,000333$

$$b) \quad I = (1)(12) \frac{2}{36.000} = S/. 0,000666$$

$$c) \quad I = (1)(12) \frac{10}{36.000} = S/. 0,003333$$

$$d) \quad I = (1)(12) \frac{180}{36.000} = S/. 0,06$$

Los números 0,000333; 0,000666; 0,003333 y 0,06 son factores fijos (multiplicadores fijos), para 1, 2, 10 ó 180 días, con una tasa de interés del 12% anual, los cuales se multiplican por cualquier capital.

Lincoyán Portus Govinden, en su obra *Matemáticas financieras*, cita el factor de interés simple como el tanto por ciento en un día y recomienda su utilización en la elaboración de tablas.

EJEMPLO 2.11

Calcular el interés que gana un capital de S/. 120.000 al 12% anual durante 180 días.

$$I = (120.000)(0,12) \frac{180}{360} = S/. 7.200$$

Por multiplicadores fijos:

$$I = (120.000)(0,000333)(180) = S/. 7.200$$

Divisores fijos

Divisor fijo es el cociente de la división de 36.500, 36.000, 18.000 ó 3.000, si la tasa de interés es anual, semestral o mensual, entre la tasa de interés correspondiente.

$$I = \frac{(C)(t)}{Df}; Df = \frac{36.500}{i}; \frac{36.000}{i}; \frac{18.000}{i}; \frac{9.000}{i}; \frac{3.000}{i}$$

si la tasa de interés es anual, semestral, trimestral o mensual, respectivamente.

EJEMPLO 2.12

Calcular el interés de S/. 10.000 al 12% mensual durante 180 días.

$$I = \frac{(10.000)(180)}{3.000/12} = \frac{(10.000)(180)}{250} = S/. 7.200$$

EJEMPLO 2.13

Un capital de S/. 1 al 12% de interés anual, ¿qué interés gana?

Planteamiento	Divisor fijo	Resultado
a) En 1 día	$I = (1) \frac{1}{36.000/12} = (1) \frac{1}{3.000} = 0,000333$	
b) En 2 días	$I = (1) \frac{2}{36.000/12} = (1) \frac{2}{3.000} = 0,000666$	
c) En 10 días	$I = (1) \frac{10}{36.000/12} = (1) \frac{10}{3.000} = 0,003333$	
d) En 180 días	$I = (1) \frac{180}{36.000/12} = (1) \frac{180}{3.000} = 0,06$	
e) En 360 días	$I = (1) \frac{360}{36.000/12} = (1) \frac{360}{3.000} = 0,12$	

EJEMPLO 2.14

Calcular el interés de S/. 120.000 en 180 días al 12% anual.

$$I = (120.000) \frac{180}{3.000} = \text{S/. } 7.200$$

EJEMPLO 2.15

Calcular el interés de S/. 90.000 en 240 días al 9% semestral.

$$I = (90.000) \frac{240}{18.000/9} = (90.000) \frac{240}{2.000} = \text{S/. } 10.800$$

CÁLCULO DEL CAPITAL

Para el cálculo del capital inicial (C), se toma como base la fórmula del interés simple (ver pág. 37).

$I = Cit$, y se despeja C:

$$C = \frac{I}{it} \quad (2.2)$$

- a) Cuando i es anual y el tiempo en días:

$$C = \frac{I}{(i) t/360} \quad (2.3)$$

- b) Cuando i es semestral:

$$C = \frac{I}{(i) t/180} \quad (2.4)$$

- c) Cuando i es trimestral:

$$C = \frac{I}{(i) t/90} \quad (2.5)$$

- d) Cuando i es mensual:

$$C = \frac{I}{(i) t/30} \quad (2.6)$$

- e) Cuando i es diario:

$$C = \frac{I}{(i) t} \quad (2.7)$$

EJEMPLO 2.16

¿Qué capital produjo un interés de S/. 18.000 a una tasa de interés de 20% anual en 180 días?

$$C = \frac{18.000}{0,20(180/360)} \quad C = \text{S/. } 180.000$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

Para el cálculo de la tasa de interés se toma como base la fórmula $I = Cit$ y se despeja i :

- a) Cuando la tasa de interés es anual y el tiempo se toma en años:

$$i = \frac{I}{(C) t}$$

- b) Cuando la tasa de interés es anual y el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C) t/360}$$

- c) Cuando la tasa de interés es semestral y el tiempo se mide en días:

$$i = \frac{I}{(C) t/180}$$

d) Cuando la tasa de interés es trimestral y el tiempo está dado en días:

$$i = \frac{I}{(C) t/90}$$

e) Cuando la tasa de interés es mensual y el tiempo se toma en días:

$$i = \frac{I}{(C) t/30}$$

f) Cuando la tasa de interés es diaria y el tiempo se expresa en días:

$$i = \frac{I}{(C) t}$$

EJEMPLO 2.17

¿A qué tasa de interés anual se coloca un capital de S/. 180.000 para que produzca S/. 18.000 en 180 días?

$$i = \frac{18.000}{(180.000) 180/360} = 0,2$$

$$i = 20\% \text{ anual}$$

Comprobación:

$$I = Cit = (180.000)(0,20)(180/360)$$

$$I = \text{S/. } 18.000$$

EJEMPLO 2.18

¿A qué tasa de interés mensual se coloca un capital de S/. 50.000 para que produzca S/. 9.000 en 240 días?

$$i = \frac{9.000}{(50.000)(240/30)} = 0,0225$$

$$i = 2 \frac{1}{4}\% \text{ mensual}$$

CÁLCULO DEL TIEMPO

Despejamos t de la fórmula básica $I = Cit$

$$t = \frac{I}{(C) i}$$

- a) Cuando la tasa de interés es anual y se quiere expresar el tiempo en días:

$$I = (C)(i) \frac{t}{360} \quad t = \frac{(I)(360)}{(C)(i)}$$

- b) Cuando la tasa de interés es semestral y se quiere dar el tiempo en días:

$$I = (C)(i) \frac{t}{180} \quad t = \frac{(I)(180)}{(C)(i)}$$

- c) Cuando la tasa de interés es trimestral y se desea medir el tiempo en días:

$$I = (C)(i) \frac{t}{90} \quad t = \frac{(I)(90)}{(C)(i)}$$

- d) Cuando la tasa de interés es mensual y se desea hallar el tiempo en días:

$$I = (C)(i) \frac{t}{30} \quad t = \frac{(I)(30)}{(C)(i)}$$

- e) Cuando la tasa de interés es anual, semestral o mensual y se desea expresar el tiempo en años o meses:

	Tiempo			
Fórmula básica	anual	semestral	trimestral	mensual
$I = Cit$	$t = \frac{I}{(C)(i)}$	$t = \frac{(I)(2)}{(C)(i)}$	$t = \frac{(I)(4)}{(C)(i)}$	$t = \frac{(I)(12)}{(C)(i)}$

EJEMPLO 2.19

¿En qué tiempo un capital de S/. 850.000 ganará un interés de S/. 45.000 al 18% anual?

$$t = \frac{(45.000)(360)}{(850.000)(0,18)} = 105,88 \text{ días; } 106 \text{ días aproximadamente}$$

$t = 3$ meses y 16 días, aproximadamente.

EJEMPLO 2.20

¿En qué tiempo un capital de S/. 420.000 ganará un interés de S/. 38.000 al 1,7% mensual?

$$t = \frac{(38.000)(30)}{(420.000)(0,017)} = 159,66 = 160 \text{ días}$$

$t = 5$ meses y 10 días, aproximadamente.

CÁLCULO DEL MONTO A INTERÉS SIMPLE

El monto a interés simple es la suma del capital original más los intereses generados en el transcurso del tiempo. Se representa con la letra M.

Por definición; $M = C + I$; en la fórmula del interés simple: $I = Cit$

Remplazando el valor de I:

$$M = C + Cit$$

Al obtener el factor común C; se tiene la fórmula del monto.

$$M = C (1 + it) \quad (2.8)$$

EJEMPLO 2.21

Calcular el monto de un capital de S/. 150.000 al 1,8% mensual durante 180 días.

$$M = C (1 + it)$$

$$M = 150.000 \left(1 + 0,018 \frac{180}{30} \right)$$

$$M = \text{S/. } 166.200$$

Calculando primero el interés:

$$I = (150.000)(0,018)(180/30) = \text{S/. } 16.200$$

Sumando el capital, se obtiene el monto:

$$M = 150.000 + 16.200 = \text{S/. } 166.200$$

EJEMPLO 2.22

Calcular el monto de un capital de S/. 210.000 al 12% anual, del 15 de marzo al 15 de agosto del mismo año.

$$M = 210.000 \left(1 + 0,12 \frac{153}{360} \right) = \text{S/. } 220.710$$

CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL A INTERÉS SIMPLE

Valor actual o valor presente de un documento o deuda es el capital calculado en una fecha anterior a la del vencimiento del documento, deuda o pago. Se representa por la letra C.

Valor actual o presente de una suma, con vencimiento en una fecha futura, es aquel que, a una tasa dada y en un periodo de tiempo determinado hasta la fecha de vencimiento, alcanzará un valor igual a la suma debida.

Esta definición, corta y concisa, resume el concepto de valor actual y precisa que el tiempo faltante para el vencimiento de un documento financiero o deuda es el que interesa y debe tomarse en cuenta para el cálculo.



Deducción de la fórmula del valor actual:

Se deduce de la fórmula del monto a interés simple, $M = C (1 + it)$, de la cual se despeja C .

$$C = \frac{M}{1 + it} \quad (2.9)$$

(Fórmula del valor actual a interés simple).

El valor actual puede calcularse con tasa de interés anual, semestral, mensual, etc., y con el tiempo dado en días, meses, años, etc. En el cálculo se determina siempre el tiempo que falta para el vencimiento del documento, deuda o pago por cuanto se considera el monto final para el cálculo.

EJEMPLO 2.23

De un documento de S/. 100.000, con vencimiento en 180 días, se desea conocer su valor actual, 60 días antes de su vencimiento, considerando una tasa de interés del 18% anual.

$$C = 100.000 / 1 + [0,18 (60/360)] = S/. 97.087,38$$

Comprobación:

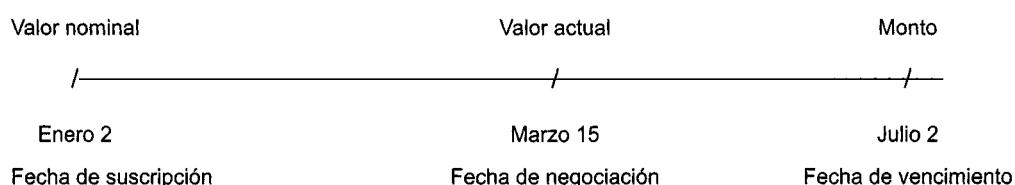
$$M = 97.087,38 [1 + 0,18 (60/360)] = S/. 100.000$$

GRÁFICA DE TIEMPOS Y VALORES

Antes de explicar los dos casos de valor actual en interés simple, es necesario conocer la *Gráfica de tiempos y valores*, que consiste en una línea recta en la cual se colocan los siguientes datos:

En la parte de abajo de la línea: fecha de suscripción, fecha de negociación o de descuento y fecha de vencimiento del documento u obligación. En la gráfica se puede observar y calcular con facilidad el tiempo comprendido entre la fecha de negociación y la de vencimiento, que es el tiempo pertinente para el cálculo del valor actual.

En la parte superior de la línea: valor nominal, valor actual o precio y valor al vencimiento o monto, como se observa en la gráfica:



Esta gráfica es muy útil para el planteamiento y resolución de problemas de valor actual y otros tipos de problemas en matemática financiera, como se verá en los ejemplos que se explican a continuación.

Existen dos casos en el cálculo del valor actual:

- a) Cuando se conoce el valor al vencimiento o monto.
- b) Cuando hay necesidad de calcular el monto.

EJEMPLO 2.24

Caso a)

Calcular el valor actual, al día de hoy, de un documento de S/ 150.000 que vence en 210 días plazo, considerando una tasa de interés del 18% anual.

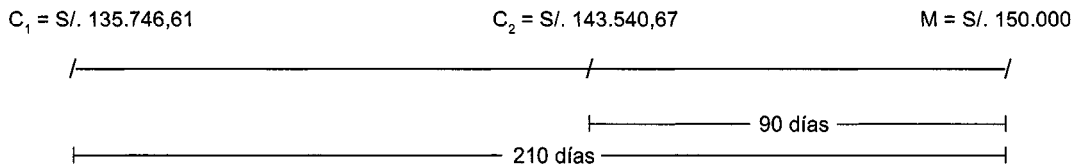
$$C = \frac{M}{1 + it} \quad C = \frac{150.000}{1 + (0,18)(210/360)} = 135.746,61$$

$$C = S/. 135.746,61$$

En el mismo ejercicio, considerar el cálculo del valor actual, 90 días antes del vencimiento.

$$C_2 = 150.000 / 1 + 0,18(90/360) = S/. 143.540,67$$

El planteamiento y la solución gráfica son:

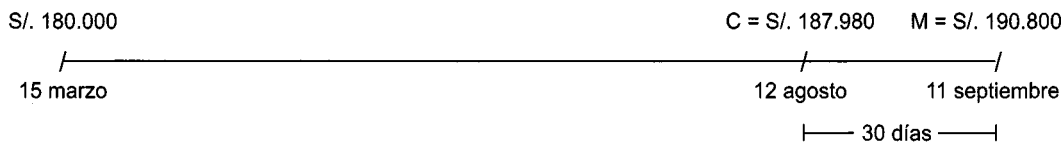


EJEMPLO 2.25

Caso b)

El 15 de marzo se suscribió un documento de S/. 180.000 con vencimiento en 180 días plazo al 1% mensual. Calcular su valor actual al 12 de agosto del mismo año, considerando una tasa de interés del 18% anual.

Se plantea el problema en forma gráfica y se sitúan los datos para la solución del problema:



Se determina la fecha de vencimiento, 11 de septiembre, y se calcula el monto:

$$M = 180.000 \left(1 + 0,01 \frac{180}{30} \right) = S/. 190.800$$

Se determina el tiempo que falta, contado desde el 12 de agosto, para el vencimiento:

Agosto	19 días
Septiembre	11 días
Total	30 días

Se calcula el valor actual:

$$C = \frac{190.800}{1 + (0,18)(30/360)} = \frac{190.800}{1,015} = S/. 187.980,30$$

Como puede observarse, para el cálculo del valor actual se toma el tiempo que falta desde la fecha dada hasta el vencimiento, 30 días, y la tasa de interés del 18% anual, así como el monto de S/. 190.800 de acuerdo con las condiciones del problema.

EL INTERÉS SOBRE SALDOS DEUDORES

En muchas instituciones financieras y casas comerciales que operan con crédito a clientes, se acostumbra utilizar el mecanismo de calcular el interés sobre los saldos deudores; es decir, sobre los saldos que van quedando después de deducir cada cuota que se paga. Otros establecimientos comerciales utilizan el método de acumulación de intereses o método "lagarto", denominado así por el excesivo interés que cobran. En los ejercicios que se exponen a continuación se utilizan los dos métodos, para establecer comparaciones.

EJEMPLO 2.26

Una cooperativa de ahorro y crédito otorga un préstamo por S/. 6.000.000 a 12 meses de plazo, al 3% mensual sobre saldos deudores. Calcular las cuotas mensuales que debe pagar el cliente.

a) Método "lagarto"

$$M = (S/. 6.000.000)[1 + 0,03 (360/30)] = S/. 8.160.000$$

$$\text{Cuota fija} = S/. 8.160.000/12 = S/. 680.000$$

$$\text{Intereses} = S/. 8.160.000 - S/. 6.000.000 = S/. 2.160.000$$

Como puede apreciarse, en este método se acumulan los intereses durante todo el periodo de la deuda; es decir, se calcula un monto y luego se divide entre el número de pagos o cuotas.

b) Método de saldos deudores

$$\text{Valor de la cuota sin intereses: } \frac{S/. 6.000.000}{12} = S/. 500.000$$

Interés pagadero en la primera cuota:

$$I = (6.000.000)(0,03)(1) = S/. 180.000$$

Valor de la primera cuota = cuota de capital + interés.

$$500.000 + 180.000 = S/. 680.000$$

Segunda cuota: se reduce el capital en S/. 500.000 y queda un saldo de S/. 5.500.000; en consecuencia, el interés será:

$$I = (5.500.000)(0,03)(1) = S/. 165.000$$

Valor de la segunda cuota:

$$500.000 + 165.000 = S/. 665.000$$

Tercera cuota: se reduce la deuda en S/. 500.000 y queda un saldo de S/. 5.000.000, por tanto el interés pagadero en la tercera cuota será:

$$I = (S/. 5.000.000)(0,03)(1) = S/. 150.000$$

Valor de la tercera cuota:

$$S/. 500.000 + S/. 150.000 = S/. 650.000; \text{ y así sucesivamente.}$$

Como puede notarse, las cuotas disminuyen en progresión aritmética en S/. 15.000.

Al calcular el valor de la última cuota (cuota 12) se tiene: saldo de la deuda: S/. 500.000

Intereses:

$$I = (S/. 500.000)(0,03)(1) = S/. 15.000$$

Valor de la última cuota:

$$S/. 500.000 + S/. 15.000 = S/. 515.000$$

Se puede elaborar una tabla financiera de las cuotas:

Periodo	Deuda	Interés	Capital	Cuota
1	6.000.000	180.000	500.000	680.000
2	5.500.000	165.000	500.000	665.000
3	5.000.000	150.000	500.000	650.000
4	4.500.000	135.000	500.000	635.000
5	4.000.000	120.000	500.000	620.000
6	3.500.000	105.000	500.000	605.000
7	3.000.000	90.000	500.000	590.000
8	2.500.000	75.000	500.000	575.000
9	2.000.000	60.000	500.000	560.000
10	1.500.000	45.000	500.000	545.000
11	1.000.000	30.000	500.000	530.000
12	500.000	15.000	500.000	515.000
Total		S/. 1.170.000	S/. 6.000.000	S/. 7.170.000

La cuota fija mensual puede calcularse dividiendo el total de cuotas entre el número de pagos o cuotas:

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{valor total de pagos o cuotas}}{\text{número de pagos o cuotas}} \quad (2.10)$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{S/. } 7.170.000}{12} = \text{S/. } 597.500$$

En total, por capital e intereses, se paga el monto de S/. 7.170.000, si la tasa de interés real es anual:

$$i = \frac{I}{(C)(t)} = \frac{\text{S/. } 1.170.000}{(\text{S/. } 6.000.000)(1)} = 0,195 = 19,5\% \text{ anual}$$

$$i = 1,625\% \text{ mensual}$$

Los intereses son: S/. 7.170.000 – S/. 6.000.000 = S/. 1.170.000 que, comparados con el primer método presentan una diferencia notable de S/. 990.000.

Es decir, la tasa de interés real que se paga en el segundo método es casi la mitad de la del primer método.

Igualmente, si se compara la cuota fija mensual:

por el primer método: S/. 680.000

por el segundo método: S/. 597.500

Así mismo el problema puede resolverse utilizando una progresión aritmética:

680.000, 665.000, 650.000 ... cuya razón o diferencia común es: -15.000

$$u = a + (n - 1)(d) = 680.000 + (12 - 1)(-15.000) = 515.000$$

$$u = \text{S/. } 515.000$$

También $u = 500.000 (1 + 0,03) = \text{S/. } 515.000$

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

$$S = \frac{12}{2} (\text{S/. } 680.000 + \text{S/. } 515.000) = \text{S/. } 7.170.000$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{\text{S/. } 7.170.000}{12} = \text{S/. } 597.500$$

$$\text{Cuota mensual fija} = \text{S/. } 597.500$$

La cuota fija puede calcularse en forma simplificada:

$$\text{Cuota fija} = \frac{\frac{n(a + u)}{2}}{n} = \frac{a + u}{2}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{S/. } 680.000 + \text{S/. } 515.000}{2} = \text{S/. } 597.500$$

Si existiese mora en el pago, deberá pagarse una tasa de interés mayor; en este ejemplo, puede ser el 4% sobre el valor de la cuota.

EJEMPLO 2.27

Si se demora diez días en el pago, a la cuota de S/. 597.500 deberá adicionar:

$$I = (597.500)(0,04) \frac{10}{30} = \text{S/. } 7.966,67$$

EJEMPLO 2.28

Una empresa comercial vende automóviles cuyo precio de lista es S/. 600.000, con una cuota inicial de 20%, y el saldo a 30 meses de plazo. Calcular la cuota fija mensual si se considera el 24% de interés anual.

$$\text{Cuota inicial} = (\text{S/. } 600.000)(0,20) = \text{S/. } 120.000$$

$$\text{Saldo a pagar en 30 meses} = \text{S/. } 600.000 - \text{S/. } 120.000 = \text{S/. } 480.000$$

- a) Al calcular la cuota fija mediante el método de acumulación de intereses o método "Lagarto" se obtiene:

$$M = \text{S/. } 480.000 \left(1 + 0,24 \frac{900}{360} \right) = \text{S/. } 768.000$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{S/. } 768.000}{30} = \text{S/. } 25.600$$

- b) Al calcularla por el método de saldos deudores; es decir, calculando sobre los saldos que quedan luego de haber realizado el respectivo pago:

$$\text{Cuota de capital} = \frac{\text{S/. } 480.000}{30} = \text{S/. } 16.000$$

Primera cuota: capital + interés

$$I = \text{S/. } 16.000 + \text{S/. } 9.600 = \text{S/. } 25.600$$

$$I = \text{Cit}; I = (\text{S/. } 480.000)(0,24) \frac{30}{360} = \text{S/. } 9.600$$

Segunda cuota: S/. 16.000 + S/. 9.280 = S/. 25.280

$$I = (\text{S/. } 464.000)(0,24) \frac{30}{360} = \text{S/. } 9.280$$

Tercera cuota: S/. 16.000 + S/. 8.960 = S/. 24.960

$$I = (\text{S/. } 448.000)(0,24) \frac{30}{360} = \text{S/. } 8.960$$

Última cuota: S/. 16.000 + 320 = S/. 16.320

$$I = (S/. 16.000)(0,24) \frac{30}{360} = S/. 320$$

Por tanto puede calcularse la cuota fija:

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{25.600 + 16.320}{2} = S/. 20.960$$

TABLA DE CUOTAS MENSUALES

Periodo	Capital	Interés	Cuota	Capital reducido o deuda
1	16.000	9.600	25.600	464.000
2	16.000	9.280	25.280	448.000
3	16.000	8.960	24.960	432.000
4	16.000	8.640	24.640	416.000
5	16.000	8.320	24.320	400.000
6	16.000	8.000	24.000	384.000
7	16.000	7.680	23.680	368.000
8	16.000	7.360	23.360	352.000
9	16.000	7.040	23.040	336.000
10	16.000	6.720	22.720	320.000
11	16.000	6.400	22.400	304.000
12	16.000	6.080	22.080	288.000
13	16.000	5.760	21.760	272.000
14	16.000	5.440	21.440	256.000
15	16.000	5.120	21.120	240.000
16	16.000	4.800	20.800	224.000
17	16.000	4.480	20.480	208.000
18	16.000	4.160	20.160	192.000
19	16.000	3.840	19.840	176.000
20	16.000	3.520	19.520	160.000
21	16.000	3.200	19.200	144.000
22	16.000	2.880	18.880	128.000
23	16.000	2.560	18.560	112.000
24	16.000	2.240	18.240	96.000
25	16.000	1.920	17.920	80.000
26	16.000	1.600	17.600	64.000
27	16.000	1.280	17.280	48.000
28	16.000	960	16.960	32.000
29	16.000	640	16.640	16.000
30	16.000	320	16.320	0
Total	S/. 480.000	S/. 148.800	S/. 628.800	

También puede calcularse la cuota mensual fija para todos los meses sin elaborar la tabla, puesto que se trata de una progresión aritmética:

25.600, 25.280, 24.960 ... cuya razón es -320

$$u = S/. 25.600 + (30 - 1)(-320)$$

$$u = S/. 25.600 - S/. 9.280 = S/. 16.320$$

$$S = \frac{n}{2} (a + u)$$

$$S = \frac{30}{2} (S/. 25.600 + S/. 16.320) = 15 (S/. 41.920) = S/. 628.800$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{valor de todos los pagos}}{\text{número de cuotas}}$$

$$\text{Cuota mensual} = \frac{S/. 628.800}{30} = S/. 20.960$$

$$\text{Interés: } I = S/. 628.000 - S/. 480.000 = S/. 148.800$$

$$\text{Tasa de interés real } i = \frac{148.800}{(480.000) \left(\frac{900}{360} \right)} = \frac{148.800}{1.200.000} =$$

$$i = 0,124 = 12,4\% \text{ anual.}$$

EJEMPLO 2.29

Una cooperativa otorga préstamos por S/. 120.000 a 36 meses de plazo con una tasa de interés del 1,7% mensual. Calcular la cuota mensual que debe cobrar a sus clientes.

$$\text{Cuota de capital} = \frac{S/. 120.000}{36} = S/. 3.333,33$$

Primera cuota:

$$I = (S/. 120.000)(0,017)(30/30) = S/. 2.040$$

Interés + Capital = Cuota

$$S/. 2.040 + S/. 3.333,33 = S/. 5.373,33$$

Segunda cuota:

$$I = (S/. 116.666,67)(0,017)(30/30) = S/. 1.983,33$$

Interés + Capital = Cuota

$$S/. 1.983,33 + S/. 3.333,33 = S/. 5.316,67$$

Tercera cuota:

$$I = (S/. 113.333,34)(0,017)(30/30) = S/. 1.926,67$$

Interés + Capital = Cuota

$$S/. 1.926,67 + S/. 3.333,33 = S/. 5.260$$

Se trata de una progresión aritmética cuya razón es $-56,67$

$$u = 5.373,33 + (36 - 1)(-56,67) = S/. 3.390$$

$$S = \frac{36}{2} (5.373,33 + 3.390) = S/. 157.740$$

Al dividir entre el número de cuotas se obtiene la cuota fija mensual:

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{S/. 157.740}{36} = S/. 4.381,67$$

Comprobación:

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2} = \frac{S/. 5.373,33 + S/. 3.390}{2} = S/. 4.381,67$$

EJEMPLO 2.30

Una persona solicita un préstamo a un banco por S/. 1.000.000 a 12 meses de plazo con una tasa de interés del 48% anual, pudiendo hacer pagos trimestrales de capital e intereses. Calcular el valor de las cuotas o pagos al final de cada trimestre.

En este caso no es necesario calcular la cuota a pago fijo; por tanto, se procede a calcular cada cuota en particular

$$\text{Cuotas de capital} = \frac{S/. 1.000.000}{4} = S/. 250.000$$

Primera cuota:

$$I = (S/. 1.000.000)(0,48) \frac{90}{360} = S/. 120.000$$

$$\text{Pago} = S/. 250.000 + S/. 120.000 = S/. 370.000$$

Segunda cuota:

$$I = (S/. 750.000)(0,48) \frac{90}{360} = S/. 90.000$$

$$\text{Pago} = S/. 250.000 + S/. 90.000 = S/. 340.000$$

Tercera cuota:

$$I = (S/. 500.000)(0,48) \frac{90}{360} = S/. 60.000$$

$$\text{Pago} = S/. 250.000 + S/. 60.000 = S/. 310.000$$

Cuarta cuota:

Con este pago se cancela la deuda

$$I = (S/. 250.000)(0,48) \frac{90}{360} = S/. 30.000$$

$$\text{Pago} = S/. 250.000 + S/. 30.000 = S/. 280.000$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el interés que gana un capital de S/. 150.000 al 12% anual durante 180 días.

Respuesta

S/. 9.000

2. Calcular el interés que gana un capital de S/. 420.000 al 1,5% anual, del 15 de junio al 15 de diciembre del mismo año.
- a) con el tiempo aproximado y año comercial;
 - b) con el tiempo exacto y año comercial;
 - c) con el tiempo aproximado y año calendario;
 - d) con el tiempo exacto y año calendario;
 - e) comentar los diferentes resultados.

Respuestas

a) 3.150 b) 3.202,50 c) 3.106,85 d) 3.158,63

3. Calcular el interés que gana un capital de S/. 55.000 a una tasa de interés del 18% anual, del 1 de marzo al 1 de septiembre del mismo año, por los cuatro métodos.

Respuestas

a) 5.060 b) 4.990,68 c) 4.950 d) 4.882,19

4. Calcular el interés simple y el monto con tiempo exacto y año comercial en cada uno de los casos.
- a) S/. 1.500.000 al 18% anual a 180 días de plazo.
 - b) S/. 280.000 al 1,7% mensual a 120 días de plazo.
 - c) S/. 50.000 al 9% anual, del 15 de marzo al 31 de agosto.
 - d) S/. 85.000 al 14,4% anual, del 10 de agosto al 15 de diciembre.
 - e) S/. 4.500.000 al 1,7% mensual, del 10 de abril al 22 de octubre.
 - f) S/. 2.500.000 al 1,5% mensual, del 12 de mayo al 15 de septiembre.
 - g) S/. 3.000.000 al 0,15% diario, del 15 de marzo al 14 de abril.

Respuestas

a) S/. 135.000 y 1.635.000 b) S/. 19.040 y 299.040 c) S/. 2.112,50 y 52.112,50
d) S/. 4.318 y 89.318 e) S/. 497.250 y 4.997.250 f) S/. 157.500 y 2.657.500
g) S/. 135.000 y 3.135.000

5. ¿En qué tiempo se incrementará en S/. 80.000 un capital de S/. 550.000 colocado al 20 1/4% anual?

Respuesta

259 días



6. ¿En qué tiempo se convertirá en S/. 210.000 un capital de S/. 180.000 colocado al 1,5% mensual?

Respuesta

333 días

7. ¿A qué tasa de interés anual se colocó un capital de S/. 300.000 para que se convierta en S/. 340.000 en 210 días?

Respuesta

$i = 22,857\%$

8. ¿A qué tasa de interés mensual un capital de S/. 850.000 será $\frac{1}{4}$ parte más en 300 días?

Respuesta

2,5% mensual

9. ¿A qué tasa de interés semestral debe colocarse un capital de S/. 490.000 para que produzca S/. 80.000 en 270 días?

Respuesta

$i = 10,88435\%$

10. Calcular el valor actual de un pagaré de S/. 240.000 con vencimiento en 270 días

- a) el día de hoy con el 12% de interés anual;
- b) dentro de 30 días con el 12% de interés anual;
- c) dentro de 90 días con el 12% de interés anual;
- d) dentro de 180 días con el 12% de interés anual;
- e) antes de 60 días del vencimiento con el 12% de interés anual.

Respuestas

a) 220.183,49 b) 222.222,22 c) 226.415,09 d) 233.009,71 e) 235.294,12

11. Calcular

- a) la fecha de vencimiento;
- b) el valor al vencimiento de un documento de S/. 300.000 suscrito el 19 de abril con vencimiento en 180 días a un interés del 1% mensual;
- c) su valor el 15 de julio del mismo año, si se considera una tasa de interés del 18% anual.

Respuestas

a) 16 de octubre b) S/. 318.000 c) S/. 303.870,04

12. María otorga a Pedro un préstamo por S/. 150.000 con vencimiento en 10 meses a un interés del 18% anual desde la suscripción. Si Pedro paga su deuda 90 días antes de la fecha de vencimiento, calcular el valor del pago.

Respuesta

S/. 165.071,77

13. Se necesita conocer cuál fue la suma de dinero que colocada al 7% de interés semestral produjo S/. 95.000 en 11 meses.

Respuesta

S/. 740.259,74

14. Una empresa pagó S/. 85.600 en intereses por un pagaré de S/. 650.000 al 18% anual. Calcular el tiempo transcurrido y el monto.

Respuesta

263 días, aproximadamente; $M = S/. 735.600$

15. Una compañía invierte S/. 1.500.000 durante un año y 3 meses, por lo que obtiene un interés de S/. 210.000. Calcular la tasa de interés anual que se le reconoció.

Respuesta

$i = 11,2\%$

16. El 15 de junio una persona recibe una letra de cambio por S/. 220.000 a 240 días de plazo y al 1,7% de interés mensual desde la suscripción. ¿Cuál será el valor actual al 30 de septiembre del mismo año, si se reconoce un interés del 1,8% mensual?

Respuesta

S/. 231.450,27

17. Calcular el valor actual de un documento de S/. 68.900, 30 días antes de su vencimiento, si se considera una tasa de interés del 12% anual.

Respuesta

S/. 68.217,82

18. Una empresa comercial ofrece en venta refrigeradores cuyo precio de lista es S/. 580.000, con el 10% de cuota inicial y el saldo a 30 meses de plazo, con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular la cuota mensual fija que debe pagar el cliente:

- a) por el método de acumulación de intereses (lagarto),
- b) por el de saldos deudores.

Respuestas

a) S/. 27.840 b) S/. 22.794

19. Una cooperativa de ahorro y crédito otorga un préstamo de S/. 180.000 a 36 meses de plazo con una tasa de interés del 1,5% mensual sobre saldos deudores. Calcular:
- la cuota mensual fija que debe pagar el beneficiario del préstamo,
 - la tasa de interés real anual.

Respuestas

a) S/. 6.387,50 b) 9,25% anual

20. Una persona pide un préstamo de S/. 145.000 a 90 días de plazo al 1,8% mensual. ¿Cuánto deberá pagar por el préstamo si se demora en pagar 60 días más y le cobran el 2% mensual de interés por mora?

Respuesta

S/. 158.943,20

21. Una persona adquiere un vehículo cuyo precio es S/. 240.000 y paga el 50% de contado y el saldo a 30 meses de plazo con un interés del 1,5% mensual sobre saldos deudores. Calcular la cuota mensual fija que debe pagar.

Respuesta

S/. 4.930

AUTOEVALUACIÓN

- ¿Cuál es la fórmula para calcular el interés simple?
- Calcular el interés simple que genera un capital de S/. 3.000.000 colocado a una tasa de interés del 30% anual durante 90 días.
- ¿De cuántas maneras puede calcularse el interés simple cuando la tasa de interés es anual y se da el tiempo exacto y aproximado entre dos fechas?
- Calcular el interés simple que producirá un capital de S/. 20.000.000 colocado a una tasa de interés del 36% anual durante el tiempo comprendido entre el 5 de mayo y el 5 de noviembre del mismo año, mediante las cuatro formas de cálculo.
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el monto a interés simple?
- Calcular el monto en los ejercicios 2 y 4.
- Determinar la fórmula para calcular.
 - la tasa de interés;
 - el tiempo;
 - el capital inicial.

8. ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor actual en cualquier tiempo comprendido entre la fecha de suscripción y la fecha de negociación?
9. Un pagaré de S/. 5.000.000, suscrito el 14 de marzo a 180 días de plazo con una tasa de interés del 21% anual desde la suscripción, es vendido el 13 de mayo del mismo año a una tasa de interés del 18% anual; calcular:
- a) la fecha de vencimiento;
 - b) la gráfica de tiempos y valores;
 - c) el valor al vencimiento o monto;
 - d) el número de días comprendidos entre la fecha de suscripción y la fecha de negociación o de venta;
 - e) el valor actual o precio del pagaré a la fecha de negociación.
10. Una empresa vende automóviles a un precio de lista de S/. 60.000.000, con el 25% de cuota inicial y el saldo a 36 meses de plazo, y una tasa de interés del 3% mensual. Calcular la cuota fija mensual que debe pagar el cliente:
- a) por el método de acumulación de intereses (lagarto);
 - b) por el método de saldos deudores.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. La fórmula para calcular el interés simple es:
 $I = Cit$
en la cual I es el interés generado; C , el capital inicial; i , la tasa de interés (que puede ser anual, semestral, trimestral, bimestral, mensual, diaria (o expresada en cualquier otra unidad de tiempo), y t el tiempo, que generalmente está dado en días.
2. Se aplica la fórmula para calcular el interés simple:
 $I = Cit$
 $I = (3.000.000)(0,30)(90/360) = S/. 225.000$
Se dividió 90 entre 360 pues se trata de una tasa de interés anual, y el tiempo se expresa en días.
3. El interés simple puede calcularse de las siguientes maneras:
- a) con el tiempo aproximado y el año comercial;
 - b) con el tiempo aproximado y el año calendario;
 - c) con el tiempo exacto y el año comercial;
 - d) con el tiempo exacto y el año calendario.
4. La fórmula para calcular el monto es:
 $M = \text{capital} + \text{interés}; M = C + i$
También:
 $M = C + Cit$
 $M = C (1 + it)$

5. Se calcula el tiempo:

Mes	Exacto	Aproximado
Mayo	26	25
Junio	30	30
Julio	31	30
Agosto	31	30
Septiembre	30	30
Octubre	31	30
Noviembre	5	5
Total	184 días	180 días

El año puede ser comercial (360 días) o calendario (365 días).
Entonces tenemos 4 formas de cálculo:

- Con el tiempo aproximado y el año comercial:
 $I = (S/. 20.000.000)(0,36)(180/360) = S/. 3.600.000$
- Con el tiempo aproximado y el año calendario:
 $I = (S/. 20.000.000)(0,36)(180/365) = S/. 3.550.684,93$
- Con el tiempo exacto y el año comercial:
 $I = (S/. 20.000.000)(0,36)(184/360) = S/. 3.680.000$
- Con el tiempo exacto y el año calendario:
 $I = (S/. 20.000.000)(0,36)(184/365) = S/. 3.629.589,04$

6. Se calcula el monto en el ejercicio 2:

$$M = C + I \text{ o } M = S/. 3.000.000 + 225.000 = S/. 3.225.000$$

O también:

$$M = C(1 + it)$$

$$M = S/. 3.000.000 \{1 + (0,30)90/360\} = S/. 3.225.000$$

Así mismo el monto en el ejercicio 4:

$$\text{a) } M = S/. 20.000.000 + S/. 3.600.000 = S/. 23.600.000$$

$$\text{b) } M = S/. 20.000.000 + S/. 3.550.684,93 = S/. 23.550.684,93$$

$$\text{c) } M = S/. 20.000.000 + S/. 3.680.000 = S/. 23.680.000$$

$$\text{d) } M = S/. 20.000.000 + S/. 3.629.589,04 = S/. 23.629.589,04$$

7. Las tres fórmulas solicitadas pueden deducirse de la fórmula principal; $I = Cit$

$$\text{a) } i = \frac{I}{Ct} \quad \text{b) } t = \frac{I}{Ci} \quad \text{c) } C = \frac{I}{it}$$

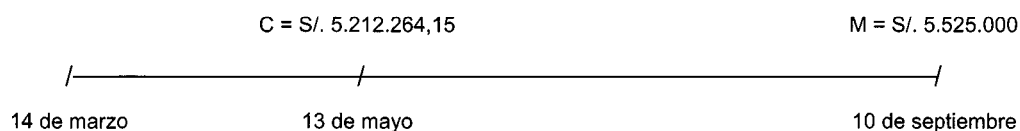
8. La fórmula para calcular el valor actual puede deducirse de la fórmula del monto,
 $M = C(1 + it)$

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

9. a) Se calcula la fecha de vencimiento:

Marzo	17
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	10
Total	180 días

- b) La gráfica de tiempos y valores:



- c) El monto:

$$M = S/. 5.000.000[(1 + (0,21)180/360)] = S/. 5.525.000$$

- d) Número de días comprendidos entre la fecha de negociación y vencimiento:

Mayo	18
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	10
Total	120 días

- e) Valor actual:

$$C = \frac{5.525.000}{1 + (0,18)(120/360)} = S/. 5.212.264,15$$

10. Calculemos el saldo:

$$\text{Saldo deuda} = S/. 60.000.000 - 0,25(S/. 60.000.000) = S/. 45.000.000$$

- a) Por el método de acumulación de intereses:

$$M = S/. 45.000.000 [1 + (0,03)1.080/30] = S/. 93.600.000$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{S/. 93.600.000}{36} = S/. 2.600.000 \text{ cada mes}$$

- b) Por el método de saldos deudores:

$$\text{Cuota de capital} = \frac{S/. 45.000.000}{36} = S/. 1.250.000$$

Interés de la primera cuota:

$$I = (S/. 45.000.000)(0,03)(30/30) = S/. 1.350.000$$

$$\text{Primera cuota} = S/. 1.250.000 + S/. 1.350.000 = S/. 2.600.000$$

Interés de la última cuota:

$$I = (S/. 1.250.000)(0,03)(30/30) = S/. 37.500$$

$$\text{Última cuota} = S/. 1.250.000 + S/. 37.500 = S/. 1.287.500$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2} = \frac{S/. 2.600.000 + S/. 1.287.500}{2} = S/. 1.943.750$$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Cuál es la diferencia entre tasa de interés e interés?
2. ¿Cuál es la diferencia entre tiempo exacto y tiempo aproximado?
3. Cuando se calcula el interés simple de un determinado capital con una tasa de interés semestral, y el tiempo en días, ¿entre cuánto debe dividirse el tiempo en la fórmula del interés simple?
4. Dibujar una gráfica de tiempos y valores.
5. En el cálculo del valor actual, cuando el documento genera intereses desde la suscripción, ¿es necesario calcular previamente el monto? ¿Por qué?
6. En las compras o ventas a plazo, ¿cuál procedimiento o método da como resultado una cuota fija más elevada?
7. ¿Cómo se calcula la última cuota en el procedimiento o método de saldos deudores?
8. ¿Se aplican la fórmula del último término y la suma de los términos de una progresión geométrica para calcular la cuota fija en el método de saldos deudores? ¿Por qué?
9. ¿Cuál de los dos métodos de cálculo preferiría el cliente de una empresa vendedora? ¿Por qué? ¿Y si fuera el dueño del negocio?

Capítulo

DESCUENTOS

3

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Descuento

Redescuento

Documentos de crédito

Letra de cambio

Pagaré

Otros documentos financieros

Descuento racional

Descuento bancario, comercial o bursátil

Valor actual con descuento bancario o valor efectivo

**Análisis de la relación descuento racional-descuento bancario
y comparación entre tasa de interés y tasa de descuento**

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN







El sistema financiero utiliza con frecuencia el descuento simple en operaciones de corto plazo, en las instituciones financieras públicas y privadas. Cuando una persona natural o jurídica desea obtener liquidez o dinero efectivo respaldado por un documento cuyo vencimiento ocurrirá en un futuro cercano, realiza una operación de descuento.

El descuento puede darse en cualquier fecha antes del vencimiento de un documento financiero, y puede ser negociado a una determinada tasa de interés que se acuerde entre las partes.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo general de este capítulo es conocer el concepto de descuento y practicar las operaciones de descuento de documentos financieros.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Conocer el concepto de descuento simple.
-  Conocer el descuento racional y sus fórmulas de cálculo.
-  Conocer el descuento bancario o bursátil y sus fórmulas de cálculo.
-  Diferenciar las tasas de interés, de las tasas de descuento.
-  Conocer el redescuento y sus operaciones.
-  Desarrollar ejercicios prácticos sobre descuentos.

CONDUCTA DE ENTRADA

Indique la respuesta correcta

1. Un documento financiero de corto plazo es mayor de 360 días.
Verdadero _____ Falso _____



2. Un documento financiero puede ser negociado antes de su vencimiento.
Verdadero _____ Falso _____
3. Un documento financiero descontado puede volver a descontarse.
Verdadero _____ Falso _____
4. Cuando un documento genera intereses desde la fecha de suscripción, es necesario calcular su valor al vencimiento.
Verdadero _____ Falso _____
5. El valor actual de una deuda o documento financiero se calcula antes de su vencimiento.
Verdadero _____ Falso _____
6. El tiempo que se toma para calcular el valor actual de una deuda o documento, es el comprendido entre la fecha de suscripción y la de negociación.
Verdadero _____ Falso _____
7. El valor actual de un documento puede calcularse a la fecha de suscripción del mismo.
Verdadero _____ Falso _____
8. El valor actual de un documento puede calcularse conociendo el valor al vencimiento o monto.
Verdadero _____ Falso _____
9. El valor actual se calcula con base en una tasa de interés, monto y tiempo.
Verdadero _____ Falso _____
10. El monto en interés simple es igual al capital menos el interés.
Verdadero _____ Falso _____

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

1. Falso
2. Verdadero
3. Verdadero
4. Verdadero
5. Verdadero
6. Falso
7. Verdadero
8. Verdadero
9. Verdadero
10. Falso

DESCUENTO

“Es la operación de adquirir, antes del vencimiento, valores generalmente endosables”¹.

“Operación por la que un banco entrega al tenedor de un efecto de comercio, antes de su vencimiento, el importe del mismo con ciertas deducciones”².

Es la operación que consiste en adquirir letras, pagarés o documentos financieros por un importe efectivo menor al valor en la fecha de vencimiento. Es decir, es la diferencia entre el valor del documento antes de la fecha en que vence y su valor al vencimiento.

Es la acción de recibir o pagar un dinero hoy, a cambio de una suma mayor comprometida para fecha futura, según las condiciones convenidas en el pagaré.

REDESCUENTO

Operación mediante la cual el Banco Central, o un banco privado, descuenta a otros bancos comerciales documentos, letras de cambio o pagarés, descontados por ellos con anterioridad a una determinada tasa de interés, mayor o menor, dependiendo de la política de restricción o aumento de operaciones crediticias y el dinero circulante.

DOCUMENTOS DE CRÉDITO

Únicamente se mencionarán la letra de cambio y el pagaré como documentos de crédito por ser los más conocidos y utilizados. Los referidos documentos se utilizan para respaldar obligaciones en dinero con vencimiento futuro. Detallan a la persona acreedora y a la deudora, el valor de la deuda, la fecha de suscripción, el plazo, el interés. En algunos casos, pueden ser endosables a terceras personas, negociables, descontados o redescontados en bancos antes de la fecha de vencimiento.

LETRA DE CAMBIO

“Documento de crédito consistente en una orden escrita por la que una persona, denominada “girador”, encarga a otra, llamada “girado” o “aceptante”, que pague a una tercera persona “tenedor”, una determinada cantidad de dinero a cierta fecha”³.

Es común que sólo haya dos personas involucradas pues el “girador” puede coincidir con el “tenedor”.

El “tenedor” o beneficiario es la persona a cuyo favor se emite la letra de cambio. La letra es susceptible de transferirse, mediante el endoso correspondiente.

La letra de cambio en la que no se especifica un plazo para el pago se considera como cancelable a la vista.

1. *Gran diccionario enciclopédico universal. Op. cit.*

2. J. C. Y. Bernard y Lewandowski Colli D. *Op. cit.*, p. 398.

3. Nelson Dávalos Arcentales, *Op. cit.*

PAGARÉ

Título que da al tenedor del documento el derecho incondicional de recibir una cantidad de dinero en determinada fecha. Se emite y negocia con descuento, dependiendo del tipo de interés y de la fecha de su vencimiento.

En los referidos documentos se pueden destacar los siguientes datos para el efecto de este texto:

1. **Valor nominal:** valor del documento, sin intereses, a la fecha de suscripción.
2. **Valor al vencimiento o monto:** valor del documento, con intereses, a la fecha de vencimiento; si no se consideran intereses, coincide con el valor nominal.
3. **Fecha de suscripción:** fecha en la cual se suscribe el documento.
4. **Fecha de vencimiento:** fecha en la que vence el plazo del documento.
5. **Fecha de negociación o descuento:** fecha en la que se descuenta, compra o vende el documento.
6. **Plazo:** duración, en días, del documento.
7. **Valor de negociación:** valor actual a la fecha del descuento, compra o venta del documento.
8. **Interés:** suma de dinero que se obtiene o se paga sobre el capital.

OTROS DOCUMENTOS FINANCIEROS

Existen otros documentos financieros de corto plazo, generalmente de renta fija; es decir, que tienen establecidos la fecha de suscripción, de vencimiento, la tasa de interés que ganan, la tasa de negociación, su valor nominal y, algunas veces, su valor al vencimiento o monto, en los cuales es relativamente fácil calcular su valor actual o precio de negociación o de descuento.

Entre los más conocidos, además de la letra de cambio y el pagaré, se hallan las pólizas de acumulación, los certificados de inversión, los certificados de ahorro, los certificados financieros, los bonos de estabilización monetaria, las notas de crédito, y otros. Además, existen los documentos de renta variable, que son las *acciones* emitidas por las empresas.

DESCUENTO RACIONAL

Descuento racional o descuento simple, a una tasa de interés, es la diferencia entre monto o valor a la fecha de vencimiento de un documento o deuda y el valor presente. Se representa por D_r . Se interpreta también como el interés simple del valor actual.

Para calcular el descuento racional se debe conocer primero el valor actual y luego restarlo del monto, formulando:

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

$$\text{Descuento racional: } Dr = M - \frac{M}{1 + it} \quad (3.1)$$

$$Dr = \text{monto} - \text{valor actual}$$

$$Dr = M - C$$

En el descuento racional, al igual que para el cálculo del valor actual, pueden darse dos tipos de problemas: cuando el documento no gana intereses desde la emisión; esto es, cuando el valor nominal coincide con el monto, y cuando es necesario calcular el monto pues el documento genera intereses desde la emisión. Enseguida se presentan dos ejemplos para analizar estos casos:

EJEMPLO 3.1

Calcular el descuento racional de un documento de S/. 250.000 suscrito el 30 de junio a 180 días de plazo, si se descontó el 30 de noviembre del mismo año con una tasa de interés del 24% anual.

En este ejemplo el valor nominal es igual al monto puesto que no gana intereses.

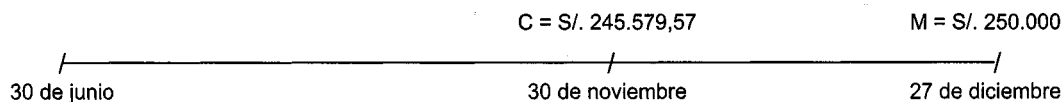
$$M = \text{S/. } 250.000$$

Fecha de vencimiento: 27 de diciembre.

Fecha de descuento: 30 de noviembre.

Días que faltan para el vencimiento: del 30 de noviembre al 27 de diciembre = 27 días.

$$C = \frac{250.000}{1 + (0,24)(27/360)} = \text{S/. } 245.579,57$$



$$Dr = 250.000 - 245.579,57 = 4.420,43 \text{ (aplicando la fórmula 3.1).}$$

EJEMPLO 3.2

Calcular el valor actual y el descuento racional de una letra de cambio de S/. 100.000 a 180 días de plazo, suscrita el 31 de marzo de 1997 al 18% anual desde su suscripción, si se descuenta el 29 de julio del mismo año al 21% anual.

$$M = 100.000 \left[1 + (0,18) \frac{180}{360} \right] = \text{S/. } 109.000$$

Fecha de vencimiento: 27 de septiembre.

Fecha de descuento: 29 de julio.

Días que faltan para el vencimiento de la letra de cambio: 60 días.

$$C = \frac{109.000}{1 + (0,21) \left(\frac{60}{360} \right)} = S/. 105.314,01 \text{ (valor actual con descuento racional)}$$

Aplicando la fórmula 3.1:

$$Dr = 109.000 - 105.314,01 = S/. 3.685,99 \text{ (descuento racional)}$$

Se puede expresar gráficamente la solución del problema:

Valor nominal	Valor actual o de negociación	Monto o valor al vencimiento
S/. 100.000	C = S/. 105.314,01	S/. 109.000
<hr/>		
31 de marzo de 1997 Fecha de suscripción	29 de julio de 1997 Fecha de descuento o negociación	27 de septiembre de 1997 Fecha de vencimiento

Esto puede comprobarse calculando el interés simple del valor actual.

$$I = (105.314,01)(0,21)(60/360) = S/. 3.685,99 = Dr$$

*"El descuento racional o matemático es igual a los intereses simples del capital que en fecha futura ganará el monto de la deuda"*⁴.

DESCUENTO BANCARIO, COMERCIAL O BURSÁTIL

Se utiliza en las operaciones comerciales y consiste en cobrar los intereses por anticipado; es decir, su cálculo se realiza sobre el monto o valor al vencimiento. Se emplea una tasa de descuento para diferenciarla de la tasa de interés que se aplica al cálculo del valor actual. Se expresa como Db.

Se denomina tasa de descuento al interés porcentual que se aplica al valor nominal del documento a la fecha de su vencimiento. Se expresa en porcentaje.

Al descontar una letra se recibe una suma inferior al valor nominal, si ésta no genera intereses desde la fecha de suscripción. Si se establece lo contrario; es decir, que gana

4. Lincoyán Portus G. *Op. cit.*, p. 27.

intereses desde la fecha de suscripción, se debe proceder a calcular los montos al vencimiento del descuento.

Para descontar una letra en un banco, ésta debe contener una promesa de pago en una fecha posterior a la cual se va a descontar el documento.

Fórmula del descuento bancario o bursátil

Este tipo de descuento es común en las operaciones, transacciones y préstamos bancarios y bursátiles (aquellas que se realizan en las bolsas de valores).

Como es un interés sobre el valor del documento o deuda a la fecha de vencimiento o monto, se expresa en forma similar a la fórmula de interés simple.

Fórmula del descuento bancario:

$$Db = Mdt \quad (3.2)$$

En donde

Db = descuento bancario o descuento bursátil;

M = valor del documento a la fecha de vencimiento;

d = tasa de descuento;

t = tiempo en días, comprendido entre la fecha del descuento del documento y la fecha de vencimiento.

EJEMPLO 3.3

¿Cuál es el descuento bancario que un banco aplica a un cliente que descuenta un pagaré de S/. 80.000 en el día de hoy, a 120 días plazo, considerando una tasa de descuento del 12% anual?

Monto: S/. 80.000

Para calcular el descuento bancario se aplica la fórmula 3.2

$$Db = Mdt$$

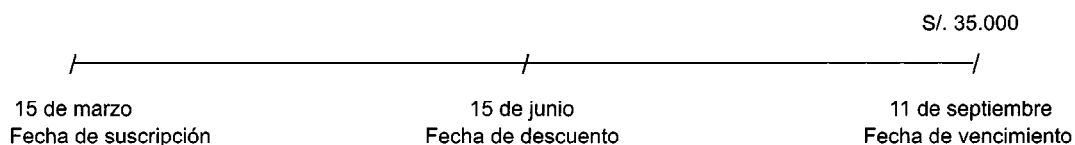
$$Db = 80.000 [0,12 (120/360)] = 3.200$$

$$Db = \text{S/}. 3.200$$

El descuento que aplica el banco es S/. 3.200.

EJEMPLO 3.4

Calcular el descuento bancario de un documento de S/.35.000, suscrito el 15 de marzo a 180 días de plazo, si se descuenta el 15 de junio del mismo año a una tasa del 18% anual. Primero se representa el problema gráficamente:



Cálculo del tiempo: el número de días entre la fecha de descuento, 15 de junio, y la fecha de vencimiento, 11 de septiembre.

Plazo	
Marzo	16
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	180 días

Tiempo de descuento	
Junio	15
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	88 días

Aplicando la fórmula 3.2, se tiene:

$$Db = S/. 35.000 (0,18)(88/360) = S/. 1.540$$

VALOR ACTUAL CON DESCUENTO BANCARIO O VALOR EFECTIVO

Es el valor efectivo que se recibe en el momento del descuento bancario de un documento, antes de la fecha de vencimiento, a una determinada tasa de descuento.

El valor actual o presente con descuento bancario se identifica como la diferencia entre el valor al vencimiento del documento y el descuento bancario. Se expresa como Cb.

$$Cb = M - Db$$

Remplazando el valor de Db, según la fórmula 3.2,

$$Cb = M - Mdt$$

Factorizando, $Cb = M (1 - dt)$

Valor actual con descuento bancario (3.3)

También se le conoce como fórmula del precio de un documento con descuento.

De donde puede deducirse:

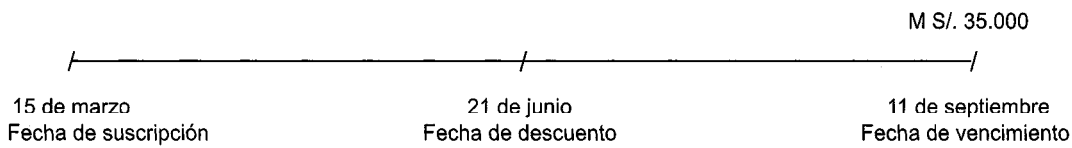
$$M = \frac{Cb}{1 - dt}$$

Monto en función del valor actual con descuento bancario (3.4).

EJEMPLO 3.5

Calcular el valor efectivo que recibe una persona que realiza un descuento de una letra de cambio de S/. 120.000, suscrita el 15 de marzo sin intereses a 180 días de plazo, si se descontó el 21 de junio del mismo año al 18% anual.

Gráficamente:



Se calculan la fecha de vencimiento y los días comprendidos entre la fecha de descuento y la de vencimiento:

Plazo	
Marzo	16
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	180 días

Tiempo de descuento	
Junio	9
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	11
Total	82 días

$$Cb = M \left(1 - dt \right); Cb = S/. 120.000 \left(1 - 0,18 \frac{82}{360} \right) = S/. 115.080$$

$$Cb = S/. 115.080$$

EJEMPLO 3.6

Un cliente de un banco solicita un préstamo de S/. 100.000 a 180 días de plazo. Calcular el valor efectivo que recibe si le aplican una tasa de descuento del 18% anual. ¿Cuál será el descuento bancario?

En este caso, el banco calcula por anticipado el interés. En consecuencia, se trata de un descuento bancario y puede aplicarse la fórmula 3.3

$$Cb = 100.000 \left(1 - 0,18 \frac{180}{360} \right)$$

$$Cb = S/. 91.000$$

Valor efectivo

Descuento bancario o comercial

$$Db = M - Cb = S/. 100.000 - 91.000 = S/. 9.000$$

EJEMPLO 3.7

¿Cuánto dinero debe solicitar un cliente de un banco si requiere S/. 150.000 pagaderos en 150 días con una tasa de descuento del 12% anual?

$$M = \frac{Cb}{1 - dt} \quad \begin{array}{l} M = 150.000 \\ d = 0,12 \\ t = 150 \end{array}$$

$$M = \frac{S/. 150.000}{1 - (0,12)150/360} = \frac{S/. 150.000}{0,95} = S/. 157.894,74$$

**ANÁLISIS DE LA RELACIÓN DESCUENTO RACIONAL-DESCUENTO BANCARIO
Y COMPARACIÓN ENTRE TASA DE INTERÉS Y TASA DE DESCUENTO**

Relación tasa de interés y tasa de descuento

1. La tasa de interés se utiliza para calcular el descuento racional o matemático y se aplica sobre el valor actual de un documento, se representa por la letra i .
2. La tasa de descuento se utiliza para calcular el descuento bancario, comercial o bursátil; se aplica sobre el valor al vencimiento del documento o monto y se representa por la letra d .

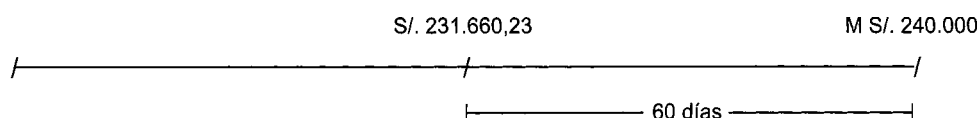
A continuación se propone un ejemplo para estudiar la relación entre los dos descuentos y las dos tasas de interés.

EJEMPLO 3.8

Calcular el descuento racional y el descuento bancario de una letra de cambio de S/. 240.000 a 210 días de plazo, si se descuenta 60 días antes de su vencimiento a una tasa de 1,8% mensual.

Gráficamente:

a) Descuento racional:



$$C = \frac{S/. 240.000}{1 + (0,018)(60/30)} = \frac{S/. 240.000}{1,036} = S/. 231.660,23$$

$$Dr = M - C \quad Dr = 240.000 - 231.660,23 = S/. 8.339,77$$

Se comprueba que corresponde al interés simple del valor actual:

$$I = Dr = Cit = S/. 231.660,23 (0,018) \frac{60}{30} = S/. 8.339,77$$

b) Descuento bancario:
 $Db = Mdt; Db = 240.000 (0,018) \frac{60}{30} = S/. 8.640$

En el descuento bancario o bursátil, el interés se calcula sobre el monto o valor al vencimiento.

Como puede notarse, el descuento bancario es siempre mayor que el descuento racional aplicado antes de la fecha de vencimiento de un documento financiero.

La relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento puede hallarse de la siguiente manera:

Se toma la relación entre las dos tasas:

$$i = \frac{d}{1 - dt} \quad (1) \quad d = \frac{i}{1 + it} \quad (2)$$

Al remplazar en (1) la tasa de descuento del ejemplo 3.8:

$$i = \frac{0,018}{1 - (0,018)(60/30)} = \frac{0,018}{1 - 0,036} = \frac{0,018}{0,964} = i = 0,018672$$

En el ejemplo se comprueba que

$$C = \frac{S/. 240.000}{1 + (0,018672)(60/30)} = S/. 231.360$$

$$Db = S/. 240.000 - S/. 231.360 = S/. 8.640$$

Al remplazar en (2) la tasa de interés i :

$$d = \frac{0,018}{1 + (0,018)(60/30)} = 0,017375$$

En el ejemplo se comprueba que

$$Dr = (S/. 240.000)(0,017375)(60/30) = S/. 8.339,77$$

Esta relación puede demostrarse así puesto que:

$$C = M (1 - dt)$$

$$M = \frac{C}{1 - dt} = C + I$$

Al remplazar por sus respectivos valores:

$$\frac{C}{1 - dt} = C + Cit$$

$$\frac{C}{1 - dt} - C = Cit$$



$$Cit = \frac{C - C(1 - dt)}{1 - dt}$$

$$Cit = C \left[\frac{1 - (1 - dt)}{1 - dt} \right]$$

$$it = \frac{dt}{1 - dt}$$

$$\text{Por tanto, } i = \frac{d}{1 - dt}$$

Puesto que:

$$M = I + C$$

$$\frac{C}{1 - dt} = Cit + C$$

$$\frac{C}{1 - dt} = C(1 + it)$$

Simplificando C y despejando $1 - dt$:

$$1 - dt = \frac{1}{1 + it}$$

$$-dt = -1 + \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = 1 - \frac{1}{1 + it}$$

$$dt = \frac{1 + it - 1}{1 + it}$$

$$dt = \frac{it}{1 + it}$$

$$d = \frac{i}{1 + it}$$

EJEMPLO 3.9

¿A qué tasa de interés equivale una tasa de descuento del 21% anual durante 90 días?

$$i = \frac{d}{1 - dt}$$

$$i = \frac{0,21}{1 - 0,21(90/360)} = 0,221636$$

Respuesta: 22,16%

EJEMPLO 3.10

¿A que tasa de descuento equivale una tasa de interés del 22,1636% anual durante 90 días?

$$d = \frac{i}{1 + it}$$

$$d = \frac{0,221636}{1 + 0,221636(90/360)} = 0,21$$

Respuesta: 21% anual

EJEMPLO 3.11

Redescuento

Una persona realiza el descuento bancario de una letra de cambio, suscrita a 210 días de plazo por valor de S/. 100.000; 60 días antes de la fecha de vencimiento con una tasa de descuento del 12% anual. El mismo día el banco redescuenta el documento en el Banco Central a una tasa del 9%.

Calcular cuánto recibe el deudor y cuánto recibe el banco que redescuenta.

$$1. \quad Cb = M (1 - dt); \quad Cb = S/. 100.000 \left[1 - (0,12) \frac{60}{360} \right]$$

$$Cb = S/. 98.000$$

El deudor recibe S/. 98.000

$$2. \quad Cb = S/. 100.000 \left[1 - (0,09) \frac{60}{360} \right] = S/. 98.500$$

El banco que redescuenta recibe S/. 98.500

EJEMPLO 3.12

Préstamo bancario

Una persona solicita un préstamo de S/. 3.000.000 a 180 días de plazo en una institución financiera que cobra una tasa de interés del 24% anual. Calcular el valor que debe pagar el cliente de dicha institución al vencimiento.

Se calcula el monto al vencimiento:

$$M = C (1 + it)$$

$$M = S/. 3.000.000 [1 + 0,24 (180/360)] = S/. 3.360.000$$

Debe pagar al vencimiento: S/. 3.360.000

Es decir, por intereses paga S/. 360.000 y por capital S/. 3.000.000

En este caso el cliente recibe S/. 3.000.000

Puede aplicarse otra modalidad: que el cliente desee pagar S/. 3.000.000 al vencimiento; por tanto, habrá que calcular el valor que la institución financiera daría como préstamo de capital al cliente:

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

$$C = \frac{S/. 3.000.000}{[1 + 0,24(180/360)]} = S/. 2.678.571,43$$

El cliente recibe S/. 2.678.571,43

Y de intereses paga un descuento racional

$$Dr = S/. 3.000.000 - S/. 2.678.571,43 = S/. 321.428,57$$

En caso de que se cobren intereses por adelantado, el problema se resolvería de la siguiente manera:

$$Db = Mdt \quad Db = S/. 3.000.000 [0,24 (180/360)] = S/. 360.000$$

Es decir, que el cliente pagaría de intereses un descuento bancario de: S/. 360.000

y recibiría un valor efectivo de:

$$Cb = M (1 - dt)$$

$$Cb = S/. 3.000.000 [1 - 0,24 (180/360)] = S/. 2.640.000$$

Como puede notarse, las dos formas de cálculo presentan una diferencia entre:

$$S/. 360.000 - S/. 321.428,57 = S/. 38.571,43 \text{ a favor del banco.}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor actual de una letra de cambio suscrita por S/. 50.000 a 180 días de plazo, si se descontó 30 días antes de su vencimiento a una tasa de interés del 18% anual.

Respuesta

$$S/. 49.261,08$$

2. Calcular el descuento racional en el problema anterior.

Respuesta

$$S/. 738,92$$

3. Calcular el descuento racional de una letra de cambio, suscrita por S/. 14.000 el 2 de mayo a 180 días de plazo, si se descontó el 2 de agosto del mismo año al 2% de interés mensual.

Respuesta

$$Dr = S/. 775,82$$

4. ¿Cuál es el descuento racional de una letra de cambio de S/. 10.000, suscrita el día de hoy a 210 días de plazo y al 1,8% mensual, si se descontó 60 días antes de su vencimiento al 1,9% mensual?

Respuesta

$$Dr = S/. 412,2$$

5. ¿Cuál es el descuento racional de una letra de cambio de S/. 20.000, suscrita el día de hoy a 240 días de plazo y al 1,2% mensual, si se descontó 70 días antes de la fecha de su vencimiento al 17% anual?

Respuesta

$$Dr = S/. 701,39$$

6. Calcular el descuento bancario de un pagaré de S/. 85.000, suscrito a 180 días de plazo, si fue descontado 30 días antes de su vencimiento a una tasa de descuento del 12% anual.

Respuesta

$$Db = S/. 850$$

7. ¿Cuál es el descuento bancario de una letra de cambio de S/. 250.000, suscrito a 120 días de plazo, si fue descontada 60 días antes de su vencimiento a una tasa de descuento del 2% mensual?

Respuesta

$$Db = S/. 10.000$$

8. Calcular el valor efectivo de un pagaré de S/. 80.000, suscrito a 120 días de plazo, si se descuenta el día de hoy a una tasa de descuento del 18% anual.

Respuesta

$$Cb = S/. 75.200$$

9. En el problema anterior, calcular el descuento bancario.

Respuesta

$$Db = S/. 4.800$$

10. Una persona solicita un préstamo de S/. 100.000 en un banco a 180 días de plazo. Calcular el valor efectivo que recibe y el descuento bancario que le hacen, si el banco aplica una tasa de descuento del 16% anual.

Respuestas

$C_b = S/. 92.000$; $D_b = S/. 8.000$

11. En el problema anterior, considerar que el préstamo se realiza con descuento racional y calcular el valor que recibiría el cliente, y el descuento.

Respuestas

$C = S/. 92.592,59$; $D_r = S/. 7.407,41$

12. Una letra de cambio de S/. 60.000 suscrita el primero de junio a 180 días de plazo, al 1% de interés mensual desde su suscripción, se descuenta en un banco al 1,5% mensual; 90 días antes de su vencimiento. Calcular el descuento bancario y el valor efectivo.

Respuestas

$D_b = S/. 2.862$; $C_b = S/. 60.738$

13. Calcular el valor actual con descuento racional y con descuento bancario de una letra de cambio de S/. 180.000 a 210 días de plazo con una tasa de interés del 1% mensual desde su suscripción, si se descontó 90 días antes de su vencimiento al 18% anual.

Respuestas

$C = S/. 184.306,20$; $C_b = S/. 183.933$

14. Demostrar que una tasa de descuento del 2% mensual equivale a una tasa de interés del 2,2727% mensual durante 180 días.

15. Una persona descuenta en un banco una letra de cambio de S/. 90.000, suscrita a 240 días de plazo, 90 días antes de su vencimiento, a una tasa de descuento del 18% anual. Después de 1 mes, el banco la redescuenta al 15% en el Banco Central. Calcular el valor que reciben el deudor y el banco que redescuenta.

Respuestas

$C_b = S/. 85.950$; $C_b = S/. 87.750$

16. Un documento cuyo valor nominal es S/. 180.000, con vencimiento en 210 días al 16% de interés anual, se descuenta 60 días antes de la fecha de su vencimiento a la tasa de interés del 1,5% mensual; calcular el descuento bancario y el valor efectivo.

Respuestas

$S/. 5.904$; $S/. 190.896$

17. Un cliente de un banco solicita un préstamo de S/. 190.000 a 180 días de plazo, con una tasa de descuento del 18% anual. ¿Cuál es el valor efectivo que el banco acredita en la cuenta del cliente?

Respuesta

S/. 172.900

18. Una letra de cambio de S/. 120.000, suscrita sin interés el 10 de enero con vencimiento en 180 días, se descuenta el 8 de abril a una tasa del 1,5% mensual. Calcular: **a)** el descuento racional; **b)** el descuento bancario; **c)** el valor actual (a una tasa de interés) y; **d)** el valor efectivo (a una tasa de descuento).

Respuestas

a) Dr = S/. 5.277,25; **b)** Db = S/. 5.520; **c)** S/. 114.772,75; **d)** S/. 114.480

19. ¿Cuánto dinero debe solicitar el cliente de un banco, a una tasa de descuento del 15% anual, si requiere S/. 210.000 pagaderos en 210 días de plazo?

Respuesta

S/. 230.137

20. ¿Cuánto dinero debe solicitar el cliente de un banco, a una tasa de interés del 18% anual si hoy requiere S/. 500.000, pagaderos en 120 días de plazo?

Respuesta

S/. 530.000

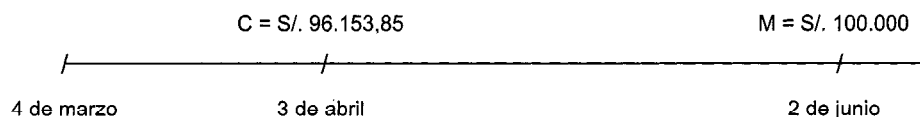
AUTOEVALUACIÓN

1. Un pagaré de S/. 100.000, suscrito el 4 de marzo a 90 días de plazo, se descuenta el 3 de abril del mismo año a una tasa de interés del 24% anual. Calcular el descuento racional.
2. En el ejercicio anterior, calcular el descuento bancario si se considera una tasa de descuento del 24% anual.
3. Un documento financiero de S/. 3.000.000, suscrito el 22 de marzo a 90 días de plazo, se descuenta el 21 de abril del mismo año a una tasa de interés del 24% anual. Calcular el descuento racional.
4. En el ejercicio anterior, calcular el descuento bancario si se considera una tasa de descuento del 24% anual.
5. En el mismo ejercicio, calcular el precio o valor efectivo del documento.

6. Un documento financiero de S/. 5.000.000, suscrito el 17 de mayo a 150 días de plazo, y una tasa de interés del 21% anual desde la suscripción, se descuenta el 16 de julio del mismo año a una tasa de interés del 20% anual. Calcular el descuento racional.
7. En el ejercicio anterior, calcular el descuento bancario, suponiendo una tasa de descuento del 20% anual.
8. En el mismo ejercicio, calcular el precio o valor efectivo del documento.
9. Un documento financiero de S/. 10.000.000, suscrito el 15 de agosto a 90 días de plazo, se descuenta en la Bolsa de Valores el 14 de septiembre del mismo año a una tasa de descuento del 36% anual. Calcular el precio o valor efectivo del documento.
10. En el ejercicio anterior, calcular el precio si se aplica una tasa de interés del 36% anual.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. Elaborar la gráfica. Solución del problema:



Plazo	
Marzo	27
Abril	30
Mayo	31
Junio	2
Total	90 días

Tiempo de descuento
27 días
31 días
2 días
60 días

$$\begin{aligned}
 Dr &= M - C && \text{(fórmula 3.1)} \\
 Dr &= \text{S/. } 100.000 - \text{S/. } 100.000 / 1 + 0,24(60/360) = \\
 Dr &= \text{S/. } 100.000 - \text{S/. } 96.153,85 = \text{S/. } 3.846,15
 \end{aligned}$$

Respuesta

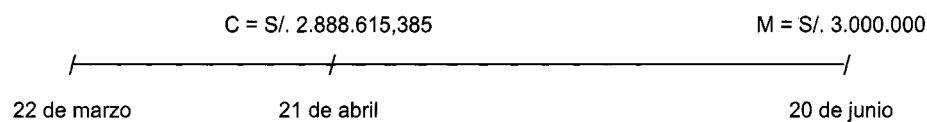
$$Dr = \text{S/. } 3.846,15$$

2. $Db = Mdt$ (fórmula 3.2)
 $Db = S/. 100.000[0,24(60/360)] = S/. 4.000$

Respuesta

$Db = S/. 4.000$

3. Elaborar la gráfica. Solución:



Plazo	
Marzo	9
Abril	30
Mayo	31
Junio	20
Total	90 días

Tiempo de descuento
9 días
31 días
20 días
60 días

Utilizamos la fórmula 3.1

$$Dr = S/. 3.000.000 - S/. 3.000.000 / 1 + 0,24(60/360) =$$

$$Dr = S/. 3.000.000 - S/. 2.884.615,385 = S/. 115.384,615$$

Respuesta

$Dr = S/. 115.384,615$

4. Se utiliza la fórmula 3.2
 $Db = Mdt$
 $Db = S/. 3.000.000[0,24(60/360)] = S/. 120.000$

Respuesta

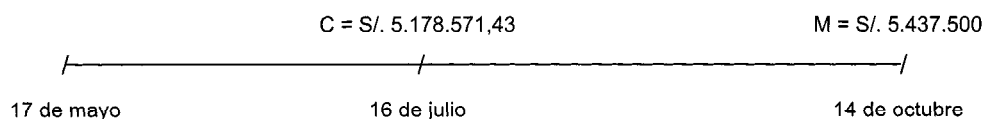
$Db = S/. 120.000$

5. Se emplea la fórmula 3.3
 $Cb = M(1 - dt)$
 $Cb = S/. 3.000.000 [1 - 0,24(60/360)] = S/. 2.880.000$

Respuesta

$Cb = S/. 2.880.000$

6. Elaborar la gráfica. Solución:



Plazo	
Mayo	14
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	30
Octubre	14
Total	150 días

Tiempo de descuento
15 días
31 días
30 días
14 días
90 días

$$M = 5.000.000[1 + 0,21(150/360)] = S/. 5.437.500$$

Se aplica la fórmula 3.1

$$Dr = 5.437.500 - 5.437.500/[1 + 0,20(90/360)] =$$

$$Dr = 5.437.500 - 5.178.571,43 = S/. 258.928,57$$

Respuesta

$$Dr = S/. 258.928,57$$

7. Se aplica la fórmula 3.2

$$Db = Mdt$$

$$Db = S/. 5.437.500 [0,20(90/360)] = S/. 271.875$$

Respuesta

$$Db = S/. 271.875$$

8. Se utiliza la fórmula 3.3

$$Cb = M(1 - dt)$$

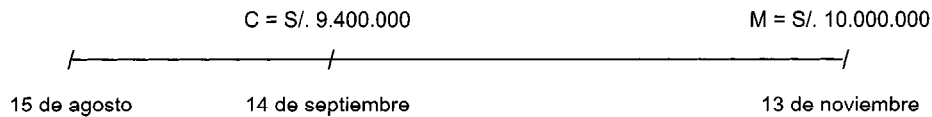
$$Cb = S/. 5.437.500[1 - 0,20(90/360)] = S/. 5.165.625$$

$$\text{También } Cb = S/. 5.437.500 - 271.875 = S/. 5.165.625$$

Respuesta

$$Cb = S/. 5.165.625$$

9. Elaborar la gráfica. Solución



Plazo	
Agosto	16
Septiembre	30
Octubre	31
Noviembre	13
Total	90 días

Tiempo de descuento
16 días
31 días
13 días
60 días

Se aplica la fórmula 3.3

$$Cb = M(1 - dt)$$

$$Cb = S/. 10.000.000[1 - 0,36(60/360)] = S/. 9.400.000$$

Respuesta

$$Cb = S/. 9.400.000$$

10. Se aplica la fórmula del valor actual

$$C = S/. 10.000.000/[1 + 0,36(60/360)] = S/. 9.433.962,26$$

Respuesta

$$\text{Precio} = S/. 9.433.962,26$$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Qué es un descuento?
2. ¿Qué es un descuento racional?
3. ¿Qué es un descuento bancario, comercial o bursátil?
4. ¿Qué es valor efectivo o precio de un documento financiero?
5. ¿Cuál es la fórmula del descuento racional?



6. ¿Cuál es la fórmula del descuento bancario o bursátil?
7. ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor efectivo o precio?
8. ¿Para calcular el descuento racional se necesita calcular primero el valor actual?
¿Por qué?
9. ¿Cuando un documento financiero gana intereses desde la suscripción es necesario calcular el monto antes de calcular el descuento? ¿Por qué?
10. ¿Qué es el redescuento?

Capítulo 4

ECUACIONES DE VALOR Y CUENTAS DE AHORRO

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Ecuaciones de valor

Aplicaciones de las ecuaciones de valor

Cuentas de ahorro

Sistemas de cálculo de los intereses

Liquidación de intereses en cuentas de ahorros

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN

En los problemas de matemáticas financieras, muchas veces se necesita canjear, cambiar o negociar un conjunto de obligaciones de corto plazo, por uno o más pagos, con tasa de interés y tiempo acordadas entre acreedor y deudor. En este caso se utilizan las ecuaciones de valor, que facilitan el planteamiento y la solución de los citados problemas en forma gráfica y matemática.

Cuando una persona, natural o jurídica, tiene varias obligaciones o deudas, puede plantear a su acreedor formas de pago que, sin dejar de reconocer sus obligaciones, le permitan realizar la cancelación de sus deudas por un solo pago, utilizando para el cálculo las ecuaciones de valor.







También se utilizan estas ecuaciones para conocer el monto acumulado de varios depósitos sucesivos o el valor actual o presente de varios pagos sucesivos, todo esto a corto plazo, utilizando el interés simple.

Por otra parte, en este capítulo se estudiarán las cuentas de ahorro y sus mecanismos de cálculo y liquidación, como un antecedente para comprender el interés compuesto.

OBJETIVO GENERAL

Conocer la utilidad de las ecuaciones de valor como un mecanismo de cálculo lógico, ágil y fácil para remplazar un conjunto de obligaciones por uno o más pagos, calcular el monto de una serie de depósitos y el valor actual o presente de una serie de pagos, así como manejar los procedimientos de cálculo de liquidación de intereses de las cuentas de ahorro.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Cómo plantear una ecuación de valor.
-  Cómo establecer la fecha focal.
-  Cómo resolver una ecuación de valor.
-  Cómo aplicar las ecuaciones de valor en problemas prácticos.
-  Cómo resolver una comparación de ofertas para comprar o para vender.
-  Cómo realizar los cálculos de intereses en una cuenta de ahorros.

CONDUCTA DE ENTRADA

Seleccione la respuesta correcta.

1. ¿Qué es una obligación al vencimiento? **a)** valor nominal; **b)** valor actual; **c)** monto.
2. Un documento financiero calculado antes de la fecha de vencimiento es: **a)** valor nominal; **b)** valor actual; **c)** monto.
3. El monto significa: **a)** valor al vencimiento; **b)** valor nominal; **c)** valor actual.
4. Si un documento financiero se paga antes de su vencimiento, se debe calcular: **a)** su valor actual; **b)** el monto; **c)** el valor nominal.
5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado con una incógnita?
a) $25 + 8x = 40 - 2x$; **b)** $23xy - 12 = 20xy + 6$; **c)** $2x^2 - x + 5 = 0$.
6. En un gráfico de tiempos y valores se pueden expresar: **a)** fechas; **b)** valores actuales; **c)** valores al vencimiento.
7. Una gráfica de tiempos y valores es: **a)** una curva; **b)** una recta; **c)** una circunferencia.
8. El monto de un documento es: **a)** el valor actual; **b)** el capital más los intereses; **c)** los intereses.
9. La gráfica de tiempos y valores permite: **a)** ubicar una fecha de referencia; **b)** calcular cuentas de ahorro; **c)** calcular descuentos.
10. ¿Qué es una incógnita? **a)** un valor conocido; **b)** un valor por conocer.

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

- 1.** c) **2.** b) **3.** a) **4.** a) **5.** a)
6. a), b) y c) **7.** b) **8.** b) **9.** a) **10.** b)

ECUACIONES DE VALOR

Son aquellas que se utilizan para la resolución de problemas de matemáticas financieras en que se rempazan un conjunto de obligaciones, con diferentes fechas de vencimiento, por uno o varios valores con otra(s) fecha(s) de referencia, previo acuerdo entre el acreedor y el deudor.

Se emplean para consolidar o remplazar dos o más deudas por una sola. También se utilizan para el cálculo del monto de una serie de depósitos y para calcular el valor actual de una serie de pagos.

Para la resolución de los problemas las ecuaciones de valor relacionan las diferentes fechas de vencimiento con una denominada *fecha focal*.

“En las operaciones comerciales, frecuentemente es necesario cambiar un paquete de obligaciones por otro conjunto de diferentes capitales disponibles en distintos tiempos. Para hacer esto es necesario trasladar todas las obligaciones a una fecha común, llamada fecha o momento de referencia; obtendremos entonces una ecuación de valor”¹.

“Todo problema de matemáticas financieras puede ser resuelto mediante una ecuación de valor. Es simplemente una igualdad entre entradas y salidas (prestaciones y contraprestaciones) de capitales financieros, una vez que sus vencimientos han sido homogeneizados por un tiempo común (es decir, una vez que los capitales han sido trasladados a un instante temporal común)”².

Recordemos que en los “gráficos de tiempos y valores”, que contienen diferentes valores y fechas, podemos aplicar la solución de problemas de matemáticas financieras y definir una fecha focal, para trasladar todos los valores a esa fecha y, una vez relacionados con ella, plantear el problema.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE VALOR

Las aplicaciones de las ecuaciones de valor se organizan en cuatro tipos:

- a) Remplazar un conjunto de obligaciones o deudas por un solo pago.
- b) Comparación de ofertas para comprar o vender.
- c) Cálculo del monto de una serie de depósitos sucesivos a corto plazo.
- d) Cálculo del valor actual o presente de una serie de pagos sucesivos a corto plazo.

a) *Remplazar un conjunto de obligaciones o deudas por un solo pago*

EJEMPLO 4.1

Una empresa tiene las siguientes obligaciones o deudas:

$M_1 = \$/. 5.000.000$ a 60 días plazo

$M_2 = \$/. 7.000.000$ a 120 días plazo

$M_3 = \$/. 10.000.000$ a 240 días plazo

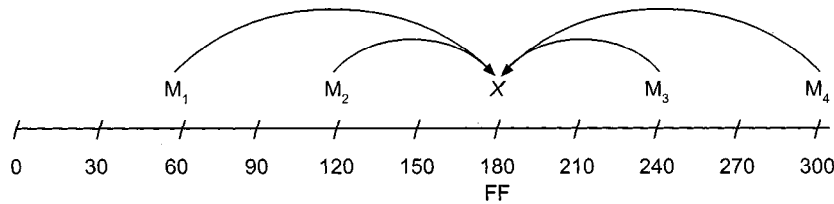
$M_4 = \$/. 12.000.000$ a 300 días plazo

La empresa desea remplazar sus obligaciones por un solo pago a 180 días plazo, considerando una tasa de interés del 18% anual. Calcular el valor del pago único.

1. *Ibíd.*

2. Robert Cissell y Helen Cissell. *Matemáticas financieras*. Ed. Compañía Editorial Continental S. A. México, 1978, p. 1.

Expresemos el problema en forma gráfica:



Como se aprecia en el gráfico, se ha tomado como fecha focal los 180 días, que es la fecha de pago consolidado de todas las deudas. Las dos primeras deudas a los 60 y 120 días ya han vencido, por tanto, deben calcularse como monto; mientras que las otras dos deudas, a los 240 y 300 días, se pagan por anticipado, por lo que deben calcularse como valor actual o como valor presente.

Calculando los tiempos en días:

$$t_1 = 180 - 60 = 120$$

$$t_2 = 180 - 120 = 60$$

$$t_3 = 180 - 240 = -60$$

$$t_4 = 180 - 300 = -120$$

Se puede plantear la ecuación de valor:

$$X = M_1 (1 + t_1) + M_2 (1 + t_2) + M_3 / (1 + t_3) + M_4 / (1 + t_4)$$

$$X = 5.000.000[1 + 0,18(120/360)] + 7.000.000[1 + 0,18(60/360)]$$

$$+ 10.000.000 / [1 + 0,18(60/360)] + 12.000.000 / [1 + 0,18(120/360)]$$

$$X = 5.300.000 + 7.210.000 + 9.708.737,86 + 11.320.754,72$$

$$X = S/. 33.539.492,58$$

También se puede resolver con una tasa de descuento y con valores efectivos:

$$X = 5.300.000 + 7.210.000 + 10.000.000[1 - 0,18(60/360)] +$$

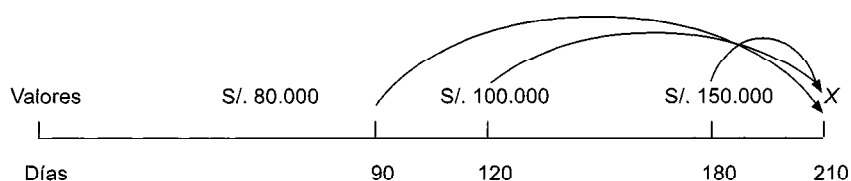
$$12.000.000[1 - 0,18(120/360)]$$

$$X = 5.300.000 + 7.210.000 + 9.700.000 + 11.280.000$$

$$X = S/. 33.490.000$$

EJEMPLO 4.2

Una persona debe tres pagarés. Uno de S/. 80.000 a 90 días de plazo; otro de S/. 100.000 a 120 días de plazo y un tercero por S/. 150.000 a 180 días de plazo; la persona desea reemplazar estas tres deudas por una sola, con vencimiento en 210 días de plazo. Si se le aplica una tasa de interés de 18% anual, calcular el valor del nuevo pagaré.



Sea X el valor del nuevo pagaré y 210 días la fecha focal, por ser la nueva fecha de pago convenida. En consecuencia, como todos los valores tienen fecha de vencimiento posterior a la fecha focal, deberán pagar interés hasta los 210 días:

M_1 = primera deuda; M_2 = segunda deuda; M_3 = tercera deuda

$$t_1 = 210 - 90 = 120 \text{ días}$$

$$t_2 = 210 - 120 = 90 \text{ días}$$

$$t_3 = 210 - 180 = 30 \text{ días}$$

Entonces se tiene:

$$X = 80.000 \left[1 + 0,18 \left(\frac{120}{360} \right) \right] + 100.000 \left[1 + 0,18 \left(\frac{90}{360} \right) \right]$$

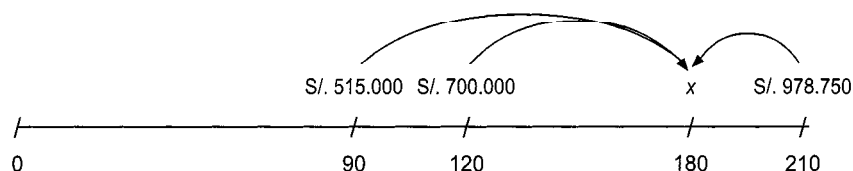
$$+ 150.000 \left[1 + 0,18 \left(\frac{30}{360} \right) \right]$$

$$X = 84.800 + 104.500 + 152.250 = \text{S/. } 341.550$$

EJEMPLO 4.3

Una empresa debe S/. 500.000 con vencimiento en 90 días al 1% mensual; S/. 700.000 con vencimiento a 120 días sin intereses y S/. 900.000 con vencimiento en 210 días al 15% anual. La empresa desea reemplazar sus deudas por una sola con vencimiento en 180 días; suponiendo una tasa de interés de 1,5% mensual. ¿Cuál es el valor de pago único?

Solución



Primera deuda

$$M = 500.000 \left[1 + 0,01 \left(\frac{90}{30} \right) \right] = \text{S/. } 515.000$$

Segunda deuda

$$M = S/. 700.000$$

Tercera deuda

$$M = 900.000 \left[1 + 0,15 \left(\frac{210}{360} \right) \right] = S/. 978.750$$

La fecha focal es 180 días, por ser la nueva fecha de pago convenida; en consecuencia, las dos primeras deudas se calculan como montos y la tercera deuda como valor actual.

$$X = 515.000 \left[1 + 0,015 \left(\frac{90}{30} \right) \right] + 700.000 \left[1 + 0,015 \left(\frac{60}{30} \right) \right] + \frac{978.750}{1 + 0,015(30/30)}$$

$$X = 515.000(1,045) + 700.000(1,03) + 978.750/(1,015)$$

$$X = 538.175 + 721.000 + 964.285,71$$

$$X = S/. 2.223.460,71$$

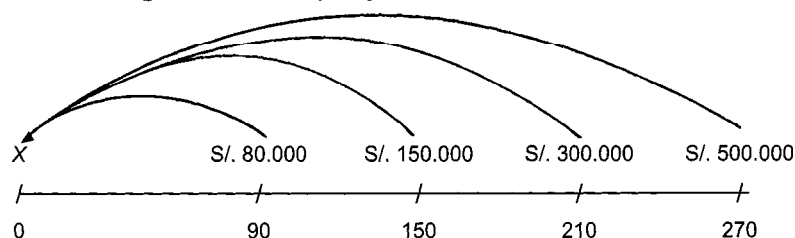
Las ecuaciones de valor se utilizan, como se expresó anteriormente, en la solución de problemas en los que se consolidan varias deudas que pueden ser anteriores o posteriores a las fechas de pago inicialmente convenidas. Si son anteriores a la fecha focal, deben calcularse como monto; si su vencimiento es posterior, deben calcularse como valor actual, sea éste con tasa de interés o tasa de descuento.

EJEMPLO 4.4

Una empresa tiene las siguientes deudas: S/. 80.000 a 90 días de plazo; S/. 150.000 a 150 días de plazo; S/. 300.000 a 210 días de plazo y S/. 500.000 a 270 días de plazo; la empresa desea remplazar sus deudas por una sola con vencimiento el día de hoy; si se considera que la operación se realizará con una tasa de descuento de 12% anual, calcular el valor de la deuda el día de hoy.

Solución

Se elabora una gráfica de tiempos y valores.



Como puede notarse la fecha focal está en el día de hoy; a ella se traen los diferentes valores, como valores presentes a una tasa de descuento, según las condiciones del problema.

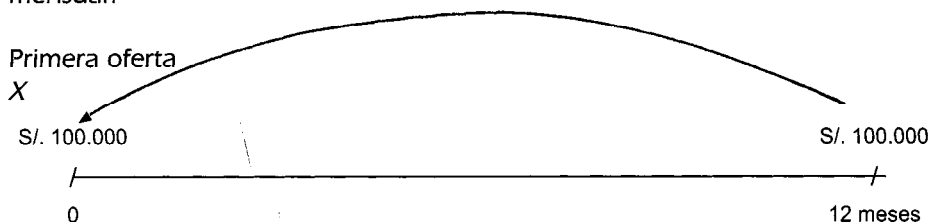
$$\begin{aligned}
 X &= 80.000 \left[1 - 0,12 \left(\frac{90}{360} \right) \right] + 150.000 \left[1 - 0,12 \left(\frac{150}{360} \right) \right] \\
 &+ 300.000 \left[1 - 0,12 \left(\frac{210}{360} \right) \right] + 500.000 \left[1 - 0,12 \left(\frac{270}{360} \right) \right] \\
 X &= 80.000 (0,97) + 150.000 (0,95) + 300.000 (0,93) + 500.000 (0,91) \\
 X &= 77.600 + 142.500 + 279.000 + 455.000 \\
 X &= S/. 954.100 \text{ (valor del nuevo documento).}
 \end{aligned}$$

b) Comparación de ofertas para comprar o vender

Para seleccionar la mejor oferta, ya sea para comprar o para vender, se toma como fecha focal el tiempo cero o valor actual de todas las ofertas.

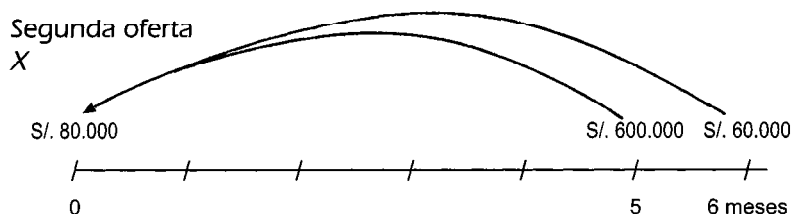
EJEMPLO 4.5

El propietario de un terreno recibe tres ofertas para la venta; la primera, S/. 100.000 al contado y S/. 100.000 a un año de plazo; la segunda, S/. 80.000 al contado y dos letras de S/. 60.000 a 5 y 6 meses de plazo, respectivamente; y la tercera, S/. 20.000 al contado, una letra de S/. 80.000 a 3 meses de plazo y otra letra de S/. 100.000 a 9 meses de plazo. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar, si se considera una tasa de interés de 2% mensual?



Como se puede notar en el gráfico, nuestra fecha focal debe ser el día de hoy para poder relacionar cada oferta, puesto que se calcularán como valores actuales.

$$\begin{aligned}
 X &= 100.000 + 100.000 / 1 + 0,02 (12) \\
 X &= 100.000 + 80.645,16 = S/. 180.645,16
 \end{aligned}$$

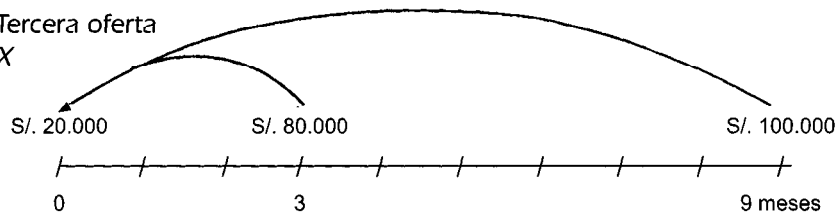


$$\begin{aligned}
 X &= 80.000 + 60.000 / 1 + (0,02)(5) + 60.000 / 1 + (0,02)(6) \\
 X &= 80.000 + 54.545,45 + 53.571,43 = S/. 188.116,88
 \end{aligned}$$



Tercera oferta

X



$$X = 20.000 + 80.000/1 + (0,02)(3) + 100.000/1 + (0,02)(9)$$

$$X = 20.000 + 75.471,70 + 84.745,76 = \text{S/. } 180.217,46$$

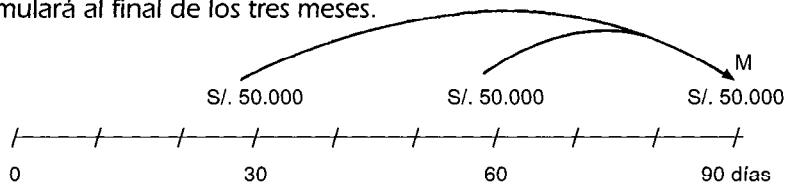
Respuesta: la segunda oferta, por ser la de mayor valor.

c) Cálculo del monto de una serie de depósitos sucesivos a corto plazo

Cuando se da el caso de una serie de depósitos sucesivos de igual valor a corto plazo, se utiliza la fecha focal al término de los depósitos.

EJEMPLO 4.6

Una persona realiza depósitos de S/. 50.000 mensuales durante tres meses, en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 2% mensual. Calcular el monto que acumulará al final de los tres meses.



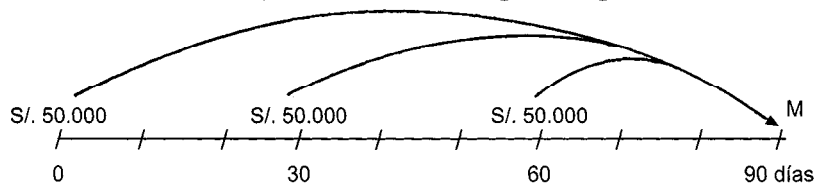
$$M = 50.000[1 + 0,02(60/30)] + 50.000[1 + 0,02(30/30)] + 50.000$$

$$M = 52.000 + 51.000 + 50.000 = \text{S/. } 153.000$$

EJEMPLO 4.7

Una persona realiza depósitos de S/. 50.000 mensuales durante tres meses en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 2% mensual, liquidados en forma anticipada. Calcular el monto que acumulará al final de los tres meses.

En este ejemplo, los intereses se liquidan por adelantado; en consecuencia, el proceso de cálculo cambia, como puede verse en la siguiente gráfica:



$$M = 50.000[1 + 0,02(90/30)] + 50.000[1 + 0,02(60/30)] + 50.000[1 + 0,02(30/30)]$$

$$M = 53.000 + 52.000 + 51.000 = \text{S/. } 156.000$$

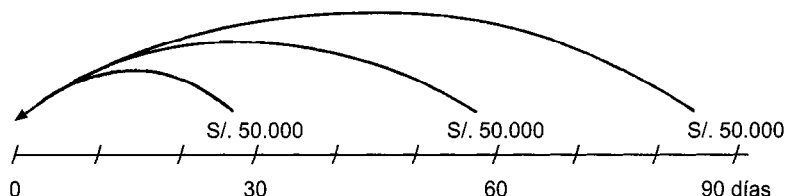
Como se puede notar, los intereses son mayores en este ejemplo.

d) Cálculo del valor actual o presente de una serie de pagos sucesivos a corto plazo

Para calcular el valor actual o presente de una serie de pagos a corto plazo, generalmente iguales, se toma como fecha focal el tiempo cero o fecha de origen de la deuda.

EJEMPLO 4.8

Una persona realiza una serie de tres pagos mensuales de S/. 50.000 para cancelar una deuda, con una tasa de interés de 3% mensual. Calcular el valor original de la deuda.

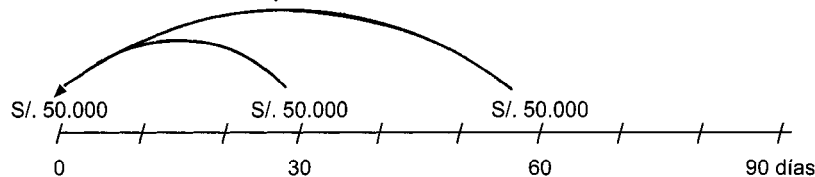


$$X = 50.000/1 + 0,03(30/30) + 50.000/1 + 0,03(60/30) + 50.000/1 + 0,03(90/30)$$

$$X = 48.543,69 + 47.169,81 + 45.871,56 = \text{S/. } 141.585,06$$

EJEMPLO 4.9

Una persona realiza pagos mensuales de S/. 50.000 en forma adelantada durante tres meses, para cubrir una deuda. Calcular el valor pagado de la deuda si se aplica una tasa de interés de 3% mensual por adelantado.



$$X = 50.000 + 50.000/1 + 0,03(30/30) + 50.000/1 + 0,03(60/30)$$

$$X = 50.000 + 48.543,69 + 47.169,81 = \text{S/. } 145.713,50$$

CUENTAS DE AHORRO

Es un servicio bancario mediante el cual una institución recibe dineros a título de ahorro y paga un interés comercial anual que es regido por disposiciones gubernamentales.

Es necesario tener en cuenta algunas definiciones para comprensión del tema.

- **Ahorro.** Es la parte de la renta disponible no consumida; es el acto de previsión económica que consiste en reservar un dinero separándolo del gasto ordinario para utilizarlo en una fecha futura.

- **Depósitos de ahorro.** Son aquellos dineros depositados en instituciones financieras; consisten en obligaciones bancarias exigibles en las condiciones especiales convenidas entre el depositante y el depositario, de acuerdo con las disposiciones que regulan el ahorro bancario. La condición especial de un depósito de ahorro es que gana interés y éste pasa a sumarse al capital depositado y se constituye en un nuevo capital que gana interés por otros periodos.
- **Depositario.** Institución financiera que recibe el depósito.
- **Interés.** Es el dinero ganado en el transcurso del tiempo, proveniente del capital depositado.
- **Tasa de interés.** Es el tanto por ciento (%) legal establecido.
- **Periodo de liquidación de intereses.** Es el tiempo en el que se realiza la acumulación de los intereses ganados al capital ahorrado para un nuevo periodo.
- **Monto.** Es el capital depositado más el interés ganado. Las cuentas de ahorros ganan un interés legal, establecido por las autoridades correspondientes, sobre el capital depositado. Este interés puede ser liquidado o capitalizado en diferentes periodos.

SISTEMA DE CÁLCULO DE LOS INTERESES

Para el cálculo de los intereses en las cuentas de ahorro se utiliza la fórmula del interés simple en cada periodo de capitalización; es decir, cuando el interés se suma al capital. Las instituciones bancarias que tienen el servicio de cuentas de ahorro utilizan tablas de interés simplificadas día por día.

EJEMPLO 4.10

Si el día 1 de julio se depositan S/. 100, el factor fijo, a una tasa de 12% anual liquidable cada semestre, sería:

$$I = Cit$$

$$I = 100 \left(\frac{(0,12)(184)}{365} \right) = (100)(0,060493)$$

$$I = \text{S/. } 6,049315 \text{ en el semestre.}$$

Regularmente, para el cálculo se emplea el número de días exactos y el año comercial de 360 días o el de 365 días o 366 días si fuere bisiesto, si la liquidación es anual; o el número de días de cada semestre: 181, para el primer semestre, y 184, para el segundo. Algunas veces, también se contabiliza desde el día que se deposita o retira el dinero.

LIQUIDACIÓN DE INTERESES EN CUENTAS DE AHORRO

Para la liquidación de los intereses se utiliza la fórmula del interés simple, con dos modalidades de cálculo: la primera toma en cuenta el valor de la transacción, sea depósito o retiro; y la segunda, los saldos. A continuación se realizarán ejercicios de liquidaciones semestrales de cuentas de ahorro:

EJEMPLO 4.11

Una persona propietaria de una cuenta de ahorro realiza una serie de depósitos y retiros con los valores y fechas que se detallan a continuación: el 15 de enero depositó S/. 10.000 para abrir la cuenta; el 10 de febrero depositó S/. 5.000; el 2 de marzo retiró S/. 6.000; el 3 de abril retiró S/. 2.000; el 30 de abril depositó S/. 11.000; el 1 de junio retiró S/. 3.000. Si la cuenta de ahorro gana una tasa de interés de 14% anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta a 30 de junio?

Se elabora un cuadro demostrativo de las fechas, depósitos, retiros, saldo e intereses a favor y en contra:

Fecha mes-día	Depósito	Retiro	Saldo	Intereses	
				+	-
01 - 15	10.000		10.000	636,71	
02 - 10	5.000		15.000	268,49	
03 - 02		6.000	9.000		276,16
04 - 03		2.000	7.000		61,51
04 - 30	11.000		18.000	257,37	
06 - 01		3.000	15.000		33,37
Intereses a favor y en contra				S/. 1.162,57	S/. 377,04
Intereses			S/. 758,53		
Saldo a 30 de junio:			S/. 15.785,53		

Saldo de la cuenta al 30 de junio: S/. 15.785,53

Para este ejemplo se tomó únicamente una de las dos fechas extremas:

Enero	16					
Febrero	28	18				
Marzo	31	31	29			
Abril	30	30	30	27		
Mayo	31	31	31	31	31	
Junio	30	30	30	30	30	29
Total días	166	140	120	88	61	29

Primer depósito

$$I = 10.000(0,14)(166/365) = \text{S/}. 636,71$$

Segundo depósito

$$I = 5.000(0,14)(140/365) = \text{S/}. 268,49$$

Primer retiro

$$I = 6.000(0,14)(120/365) = - \text{S/}. 276,16$$

Segundo retiro

$$I = 2.000(0,14)(88/365) = - \text{S/}. 67,51$$

Tercer depósito

$$I = 11.000(0,14)(61/365) = \text{S/}. 257,37$$

Tercer retiro

$$I = 3.000(0,14)(29/365) = - \text{S/}. 33,37$$

Total intereses

S/}. 785,53

Se puede hacer el mismo cálculo por factores fijos o multiplicadores fijos:

a) $10.000(0,063671) = + 636,71$

b) $5.000(0,053698) = + 268,49$

c) $6.000(0,046027) = - 276,16$

d) $2.000(0,033753) = - 67,51$

e) $11.000(0,023397) = + 257,37$

f) $3.000(0,011123) = - 33,37$

Total

S/}. 785,53

También se puede hacer el cálculo tomando los saldos de la cuenta, para lo cual se debe calcular el número de días comprendidos entre cada transacción:

Primera:	enero	16
	febrero	10
Suman		<u>26 días</u>
Segunda:	febrero	18
	marzo	2
Suman		<u>20 días</u>
Tercera:	marzo	29
	abril	3
Suman		<u>32 días</u>
Cuarta:	abril	27 días
Quinta:	mayo	31
	junio	1
Suman		<u>32 días</u>
Sexta:	junio	29 días
Total		166 días

- 1 $I = 10.000(0,14)(26/365) = 99,73$
- 2 $I = 15.000(0,14)(20/365) = 115,07$
- 3 $I = 9.000(0,14)(32/365) = 110,46$
- 4 $I = 7.000(0,14)(27/365) = 72,49$
- 5 $I = 18.000(0,14)(32/365) = 220,93$
- 6 $I = 15.000(0,14)(29/365) = 166,85$

Total intereses **S/. 785,53**

EJEMPLO 4.12

El señor N. N., poseedor de una cuenta de ahorros en una institución bancaria, tiene un saldo en su cuenta de S/. 40.000 a 30 de junio; en el segundo semestre del mismo año realizó el siguiente movimiento: un retiro de S/. 2.500 el 25 de agosto; un depósito de S/. 3.000 el 18 de septiembre; un retiro de S/. 6.000 el 4 de noviembre. Si la tasa de interés fue de 7% anual, ¿cuánto interés ganará la cuenta a 31 de diciembre?

Forma de cálculo

Tiempo:

Julio	31			
Agosto	31	6		
Septiembre	30	30	12	
Octubre	31	31	31	
Noviembre	30	30	30	26
Diciembre	31	31	31	31
Total	184	128	104	57

Interés del saldo

$$I = 40.000(0,07)(184/365) = \text{S/. } 1.411,51$$

Primer retiro

$$I = 2.500(0,07)(128/365) = - \text{S/. } 61,37$$

Primer depósito

$$I = 3.000(0,07)(104/365) = \text{S/. } 59,84$$

Segundo retiro

$$I = 6.000(0,07)(57/365) = - \text{S/. } 65,59$$

Total intereses **S/. 1.344,39**

Con multiplicadores fijos o factores:

$$I = 40.000(0,035287) = + 1.411,51$$

$$I = 2.500(0,024547) = - 61,37$$

$$I = 3.000(0,019945) = + 59,84$$

$$I = 6.000(0,010931) = - 65,59$$

Total intereses **S/. 1.344,39**

Se puede calcular tomando los saldos de la cuenta:

$$40.000(0,07)(56/365) = 429,59$$

$$37.500(0,07)(24/365) = 172,60$$

$$40.500(0,07)(47/365) = 365,06$$

$$34.500(0,07)(57/365) = 377,14$$

$$\text{Total intereses} \quad \text{S/. } 1.344,39$$

Ahora se elabora el formato de la cuenta de ahorros

Fecha	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses	
mes-día				+	-
07 - 01			40.000	1.411,51	
08 - 25		2.500	37.500		61,37
09 - 18	3.000		40.500	59,84	
11 - 04		6.000	34.500		65,59
Intereses a favor y en contra				S/. 1.471,35	S/. 126,96
Intereses			S/. 1.344,39		
Saldo final + intereses			S/. 35.844,39		

EJEMPLO 4.13

El primero de enero se abre una cuenta de ahorros con un valor de S/. 1.000; el 15 de febrero se depositan S/. 5.000; el 1 de abril se retiran S/. 2.000; el 15 de mayo se depositan S/. 8.000; y el 1 de junio se retiran S/. 5.000. Durante el segundo semestre, el 10 de julio se depositan S/. 15.000; el 8 de agosto se retiran S/. 20.000; el 15 de septiembre se depositan S/. 25.000; el 2 de octubre se retiran S/. 10.000; el 2 de noviembre se retiran S/. 2.000; el 28 de noviembre se depositan S/. 18.000 y el 15 de diciembre se retiran S/. 5.000. ¿Cuál será el saldo de la cuenta con intereses a 31 de diciembre, si se considera una tasa de interés de 12% anual hasta el 30 de junio; y de 13% anual a partir del 1 de julio? La cuenta es liquidable semestralmente, el 30 de junio y el 31 de diciembre.

Para este ejercicio se tomará el año comercial.

Primer semestre:

Enero	30				
Febrero	28	13			
Marzo	31	31			
Abril	30	30	29		
Mayo	31	31	31	16	
Junio	30	30	30	30	29
Total	180	135	90	46	29

Primer depósito

$$I = 1.000(0,12)(180/360) = 60,00$$

Segundo depósito

$$I = 5.000(0,12)(135/360) = 225,00$$

Primer retiro

$$I = 2.000(0,12)(90/360) = - 60,00$$

Tercer depósito

$$I = 8.000(0,12)(46/360) = 122,67$$

Segundo retiro

$$I = 5.000(0,12)(29/360) = - 48,33$$

Total intereses

$$\text{S/. } 299,34$$

Cuadro de liquidación del primer semestre

Fecha mes-día	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses	
				+	-
01 - 01	1.000		1.000	60	
02 - 15	5.000		6.000	225	
04 - 01		2.000	4.000		60
05 - 15	8.000		12.000	122,67	
06 - 01		5.000	7.000		48,33
Intereses a favor y en contra				S/. 407,67	S/. 108,33
Intereses			S/. 299,34		
Saldo a 30 de junio:			S/. 7.299,34		

Cálculo del segundo semestre $I = 13\%$

Julio	31	21						
Agosto	31	31	23					
Septiembre	30	30	30	15				
Octubre	31	31	31	31	29			
Noviembre	30	30	30	30	30	28	2	
Diciembre	31	31	31	31	31	31	31	16
Total días	184	174	145	107	90	59	33	16

Interés del saldo anterior

$$I = 7.299,34(0,13)(184/360) = 485,00$$

Primer depósito

$$I = 15.000(0,13)(174/360) = 942,50$$

Primer retiro

$$I = 20.000(0,13)(145/360) = - 1.047,22$$

Segundo depósito

$$I = 25.000(0,13)(107/360) = 965,97$$

Segundo retiro

$$I = 10.000(0,13)(90/360) = - 325,00$$

Tercer retiro

$$I = 2.000(0,13)(59/360) = - 42,61$$

Tercer depósito

$$I = 18.000(0,13)(33/360) = 214,50$$

Cuarto retiro

$$I = 5.000(0,13)(16/360) = - 28,89$$

Total intereses **S/. 1.164,25**

Cuadro de liquidación del segundo semestre

Fecha mes-día	Depósitos	Retiros	Saldo	Intereses	
				+	-
06 - 30			7.299,34	485	
07 - 10	15.000		22.299,34	942,50	
08 - 08		20.000	2.299,34		1.047,22
09 - 15	25.000		27.299,34	965,97	
10 - 02		10.000	17.299,34		325
11 - 02		2.000	15.299,34		42,61
11 - 28	18.000		33.299,34	214,50	
12 - 15		5.000	28.299,34		28,89
Intereses a favor y en contra				S/. 2.607,97	S/. 1.443,72
Intereses			S/. 1.164,25		
Saldo a 31 de diciembre			S/. 29.463,59		

Variación de la tasa de interés

Como se observó en el ejercicio anterior, la tasa de interés puede variar dentro de un periodo de liquidación de intereses; cuando esto sucede, el cálculo deberá hacerse tomando como base el número de días que estuvo vigente la respectiva tasa de interés.

EJEMPLO 4.14

Un capital de S/. 10.000 estuvo depositado del 1 de enero al 31 de marzo a una tasa de 18% anual y del 1 de abril al 30 de junio a la tasa de 21%.

El cálculo deberá hacerse por el número de días que estuvo vigente la respectiva tasa de interés y luego sumar los intereses en el periodo.

$$I = 10.000(0,18)(90/360) = 450$$

$$I = 10.000(0,21)(91/360) = 530,83$$

Total intereses **980,83**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una empresa tiene tres deudas: la primera de S/. 70.000, con vencimiento en 90 días a 1% mensual; la segunda, S/. 120.000, con vencimiento en 150 días sin intereses; y la tercera, S/. 150.000, con vencimiento a 210 días de plazo y a 2% mensual; la empresa desea remplazar las tres deudas por una sola con vencimiento en 6 meses a 18% de interés anual. Calcular el valor del nuevo documento.

Respuesta

S/. 365.617,41

2. En el problema anterior, para la tercera deuda, considerar la tasa de descuento de 2% mensual para el cálculo del nuevo documento.

Respuesta

S/. 365.579,50

3. Una persona ha firmado tres documentos: el primero, S/. 50.000, a 3 meses plazo con una tasa de interés de 1% mensual, el segundo, S/. 90.000, a 120 días de plazo a una tasa de 1,5% mensual, y el tercero, S/. 120.000, a 180 días de plazo a una tasa de 18% anual. La persona desea remplazar los tres documentos por uno solo, pagadero al final del año. ¿Cuál será el valor de ese documento, si se considera una tasa de interés de 2% mensual?

Respuesta

S/. 317.930

4. Si en el problema anterior se considera el pago el día de hoy y se descuentan los tres documentos en un banco, ¿cuál será el valor de remplazo? Emplear la tasa de descuento de 2% mensual.

Respuesta

S/. 251.282

5. El propietario de un edificio que está en venta recibe tres ofertas; la primera, S/. 1.000.000 de contado y S/. 1.000.000 a un año de plazo; la segunda, S/. 800.000 al contado y dos letras de S/. 600.000, con vencimiento en 6 y 9 meses; la tercera, S/. 100.000 de contado, una letra de S/. 800.000 en tres meses y otra letra de S/. 1.100.000 en 9 meses. ¿Cuál sería, de las tres ofertas, la que conviene al vendedor, si se considera una tasa de interés de 18% anual?

Respuestas

Primera oferta S/. 1.847.458; segunda oferta S/. 1.879.093; tercera oferta S/. 1.801.747. La segunda oferta es la más conveniente para el vendedor.



6. Samuel debe S/. 50.000, con vencimiento en 90 días; S/. 100.000, con vencimiento en 150 días, y S/. 150.000, con vencimiento en 9 meses, sin intereses. Si desea saldar sus deudas con dos pagos iguales a los 6 y 12 meses, respectivamente, con una tasa de interés de 18% anual, calcular el valor de los dos pagos iguales. Considerar la fecha focal a los 12 meses y a los 6 meses.

Respuestas

- a) $X = \text{S/. } 155.023,92$ cada pago b) $X = \text{S/. } 155.046,33$ cada pago

7. Leonor tiene un terreno y le ofrecen tres alternativas: a) S/. 500.000 al contado y S/. 600.000 después de 11 meses; b) S/. 200.000 al contado y S/. 900.000 a 7 meses; c) S/. 100.000 al contado, S/. 300.000 en 3 meses, S/. 320.000 en 6 meses y S/. 380.000 en 9 meses. Si se considera una tasa de descuento de 18% anual y la fecha focal el día de hoy; ¿cuál de las tres ofertas conviene a Leonor?

Nota: Realizar los cálculos con descuentos bancarios.

Respuestas

- a) S/. 1.001.000 b) S/. 1.005.500 c) S/. 1.006.400

La tercera oferta es la más conveniente para Leonor.

8. El señor Merchán es poseedor de una cuenta de ahorros que tiene un saldo de S/. 123.000 a 31 de diciembre y ha registrado durante el primer semestre del siguiente año las operaciones que se enumeran: el 3 de enero depositó S/. 155.000; el 15 de febrero retiró S/. 30.000; el 7 de abril depositó S/. 120.000; el 30 de mayo retiró S/. 55.000. Si la tasa de interés es de 24% anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta a 30 de junio? Tomar una de las dos fechas extremas y el año comercial para el cálculo de los intereses.

Respuesta

S/. 349.258,66

9. El señor Rueda es poseedor de una cuenta de ahorros cuyo saldo a 30 de junio fue S/. 300.000. Durante el segundo semestre del mismo año realizó el siguiente movimiento: a) un depósito de S/. 50.000 el 30 de septiembre; b) un depósito de S/. 100.000 el 4 de diciembre. ¿Cuál será el saldo de la cuenta con intereses de 36% anual, a 31 de diciembre? (Considerar una sola fecha extrema).

Respuesta

S/. 511.693,14

10. Una persona tiene una cuenta de ahorros cuyo saldo a 31 de diciembre fue S/. 49.000; la persona ha realizado las siguientes operaciones en el semestre enero-junio: a) retiró S/. 3.600 el 21 de febrero; b) depositó S/. 2.800 el 9 de abril; c) depositó S/. 4.700 el 2 de mayo; d) depositó S/. 1.100 el 24 de junio. ¿Cuál será el saldo de la

cuenta a 30 de junio, si se consideran una tasa de interés de 24% anual y las dos fechas extremas?

Respuesta

S/. 59.904,72

11. Reemplazar tres deudas de S/. 50.000, S/. 100.000 y S/. 200.000, a 3, 6, y 12 meses, respectivamente, por un solo pago en 12 meses, considerando una tasa de interés de 16% anual.

Respuesta

S/. 364.000

12. En el ejemplo anterior, reemplazar las tres deudas por una sola al día de hoy, con la misma tasa de interés. Hacer los cálculos **a)** con valor actual, y **b)** con valor efectivo. Analizar los resultados.

Respuestas

a) S/. 313.083,31 **b)** S/. 308.000

13. Pedro deposita S/. 60.000 cada mes durante 4 meses consecutivos en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 2% mensual. Calcular el monto que acumulará al final de los 4 meses.

Respuesta

S/. 247.200

14. En el problema anterior, considerar que los depósitos se realizan por adelantado y la tasa de interés es 2% mensual.

Respuesta

S/. 252.000

15. María deposita S/. 40.000 cada mes durante 3 meses consecutivos en una institución financiera. Calcular el monto que acumulará al final de los 3 meses, si se considera una tasa de interés de 36% anual.

Respuesta

S/. 123.600

16. En el problema anterior, calcular el valor del monto si los depósitos se realizan por adelantado.

Respuesta

S/. 127.600

17. José paga S/. 70.000 cada mes durante 3 meses para cubrir una deuda, con una tasa de interés de 2,5% mensual. Calcular el valor original de la deuda.

Respuesta

S/. 200.075,63

18. En el problema anterior, considerar que los pagos se realizan por adelantado.

Respuesta

S/. 204.959,35

19. En el problema 17, realizar los cálculos con descuento bancario.

Respuesta

S/. 199.500

20. En el problema 18, realizar los cálculos con descuento bancario.

Respuesta

S/. 204.750

AUTOEVALUACIÓN

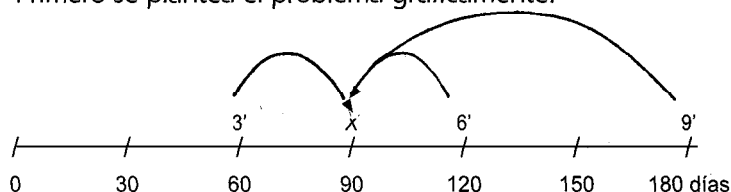
1. Una empresa tiene las siguientes obligaciones a corto plazo: **a)** 3.000.000 a 60 días; **b)** 6.000.000 a 120 días; **c)** 9.000.000 a 180 días. La empresa acuerda con su acreedor reemplazar sus deudas por un solo pago a los 90 días, con una tasa de interés de 21% anual. Calcular el valor del pago único.
2. En el problema anterior, considerar la fecha del pago único a los 180 días.
3. En el problema 1, considerar la fecha de pago en el tiempo cero o el día de hoy.
4. En el problema 3, hacer los cálculos con una tasa de descuento de 21% anual.
5. Una empresa para comprar ropa de trabajo para su personal, tiene un presupuesto de S/. 10.000.000. La empresa pide cotizaciones y recibe las siguientes propuestas: **a)** pagar S/. 5.000.000 al contado y S/. 5.000.000 en 90 días; **b)** pagar S/. 3.000.000 al contado, S/. 3.000.000 en 30 días y S/. 4.000.000 en 60 días; **c)** Pagar S/. 2.000.000 al contado, S/. 4.000.000 en 30 días y S/. 4.000.000 en 84 días. Si la tasa de interés es de 24% anual, ¿cuál oferta le conviene aceptar?
6. Sofía pone en venta un terreno avaluado en S/. 60.000.000 y recibe las siguientes propuestas: **a)** S/. 30.000.000 al contado y S/. 30.000.000 en 123 días;

b) S/. 20.000.000 al contado, S/. 20.000.000 en 60 días y S/. 20.000.000 en 120 días; **c)** S/. 15.000.000 al contado; S/. 35.000.000 en 30 días y S/. 10.000.000 en 150 días. ¿Cuál oferta le conviene aceptar si la tasa de interés es de 48% anual?

- 7.** En el problema anterior, considerar una tasa de interés de 4% anual.
- 8.** Una empresa cuenta con un presupuesto de S/. 120.000.000 para comprar maquinaria. Al consultar con varios proveedores, recibe las siguientes propuestas; **a)** pagar S/. 60.000.000 al contado y S/. 60.000.000 a 150 días; **b)** pagar S/. 30.000.000 al contado y S/. 90.000.000 a 120 días; **c)** pagar S/. 10.000.000 al contado y S/. 110.000.000 a 90 días. ¿Cuál oferta le conviene, si se considera una tasa de interés de 18% anual?
- 9.** Gabriela abre una cuenta de ahorros el 30 de junio de 1996 con S/. 100.000, y realiza las siguientes operaciones: **a)** El 14 de julio deposita S/. 20.000; **b)** El 15 de septiembre retira S/. 30.000; **c)** El 15 de octubre deposita S/. 150.000. Liquidar la cuenta de ahorros a 31 de diciembre de 1996, si la tasa de interés fue de 18% anual. Considerar el año comercial, el tiempo exacto (una de las dos fechas extremas) y la forma de cálculo relacionada con cada depósito o retiro.
- 10.** En el problema anterior, considerar la forma de cálculo relacionada con los saldos y el número de días comprendidos entre cada operación.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

- 1.** Primero se plantea el problema gráficamente.



Luego, se calcula el tiempo:

$$t_1 = 90 - 60 = 30$$

$$t_2 = 90 - 120 = -30$$

$$t_3 = 90 - 180 = -90$$

Podemos expresar la ecuación de valor.

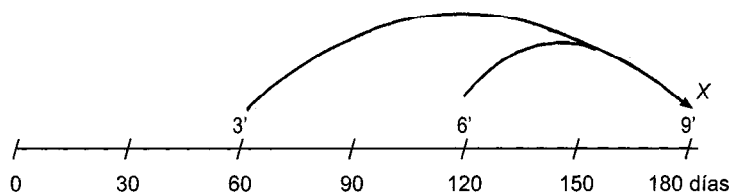
$$X = 3.000.000[1 + 0,21(30/360)] + 6.000.000/[1 + 0,21(30/360)] + 9.000.000/[1 + 0,21(90/360)]$$

$$X = 3.052.500 + 5.896.805,90 + 8.551.068,88 = 17.500.374,78$$

Respuesta

S/. 17.500.374,78

2. Plantear el problema gráficamente, con la nueva fecha focal a los 180 días.



$$t_1 = 180 - 60 = 120$$

$$t_2 = 180 - 120 = 60$$

$$t_3 = 180 - 180 = 0$$

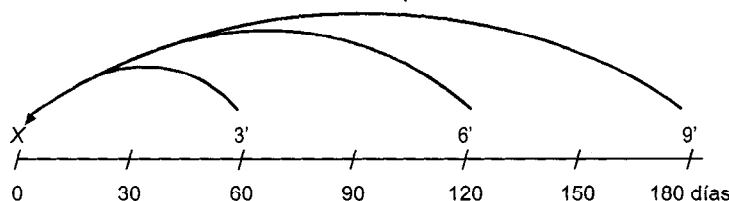
$$X = 3.000.000/[1 + 0,21(120/360)] + 6.000.000/[1 + 0,21(60/360)] + 9.000.000/[1 + 0,21(0/360)]$$

$$X = 3.210.000 + 6.210.000 + 9.000.000 = 18.420.000$$

Respuesta

S/. 18.420.000

3. Se toma la fecha focal en el tiempo cero o referenciada al criterio del valor actual.



$$t = 0 - 60 = -60/$$

$$t = 0 - 120 = -120/$$

$$t = 0 - 180 = -180/$$

$$X = 3.000.000/[1 + 0,21(60/360)] + 6.000.000/[1 + 0,21(120/360)] + 9.000.000/[1 + 0,21(180/360)]$$

$$X = 2.898.550,72 + 5.607.476,63 + 8.144.796,38$$

$$X = 16.650.823,74$$

Respuesta

S/. 16.650.823,74

4. Los cálculos se realizan con descuento bancario o bursátil.

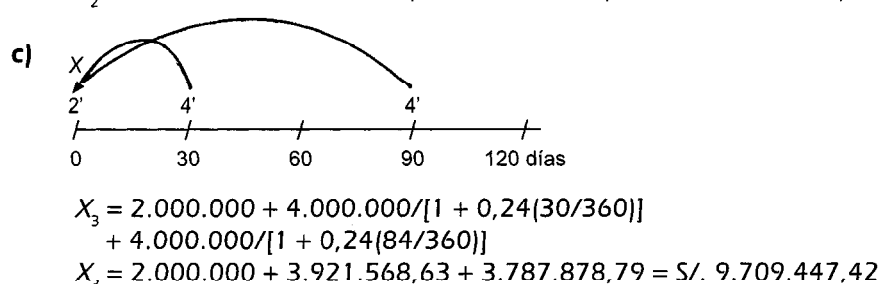
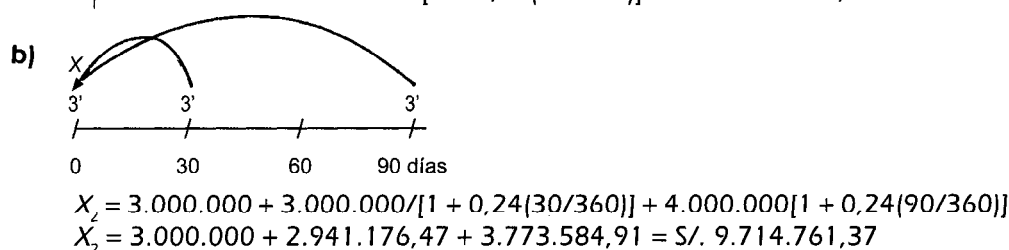
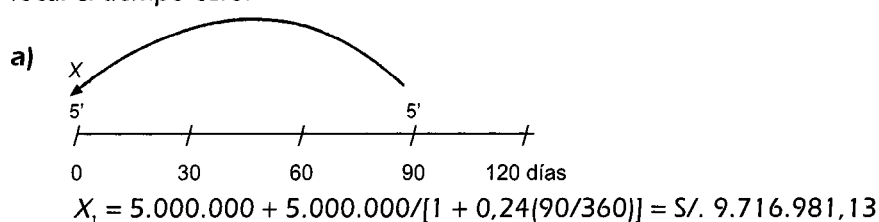
$$X = 3.000.000[1 - 0,21(30/360)] + 6.000.000[1 - 0,21(120/360)] + 9.000.000[1 - 0,21(180/360)]$$

$$X = 2.947.500 + 5.580.000 + 8.055.000 = 16.582.500$$

Respuesta

S/. 16.582.500

5. Se elabora un gráfico de tiempos y valores para cada propuesta y se toma como fecha focal el tiempo cero.



Respuesta

La tercera propuesta, S/. 9.709.447,42

6. Para este problema, se toma el valor actual de cada propuesta o fecha focal tiempo cero. Se sugiere elaborar el gráfico respectivo para cada propuesta.

- a) $X_1 = 30.000.000 + 30.000.000/[1 + 0,48(123/360)]$
 $X_1 = 30.000.000 + 25.773.195,88 = S/. 55.773.195,88$
- b) $X_2 = 20.000.000 + 20.000.000/[1 + 0,48(60/360)]$
 $+ 20.000.000/[1 + 0,48(120/360)]$
 $X_2 = 20.000.000 + 18.518.518,52 + 17.182.130,58 = S/. 55.700.649,10$
- c) $X_3 = 15.000.000 + 35.000.000/[1 + 0,48(30/360)]$
 $+ 10.000.000/[1 + 0,48(150/360)]$
 $X_3 = 15.000.000 + 32.407.407,4 + 8.333.333,33 = S/. 55.740.740,7$

Respuesta

La primera propuesta, S/. 55.773.195,88

7. Aunque en este problema se consideran los mismos criterios que en el anterior, se notará que la respuesta cambia debido a la gran diferencia entre las tasas de interés, de 48% a 4% anual.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad X_1 &= 30.000.000 + 30.000.000/[1 + 0,04(123/360)] \\ X_1 &= 30.000.000 + 29.595.527,79 = \text{S/}. 59.595.527,79 \\ \\ \text{b)} \quad X_2 &= 20.000.000 + 20.000.000/[1 + 0,04(60/360)] \\ &\quad + 20.000.000/[1 + 0,04(120/360)] \\ X_2 &= 20.000.000 + 19.867.549,67 + 19.736.842,11 = \text{S/}. 59.604.391,78 \\ \\ \text{c)} \quad X_3 &= 15.000.000 + 35.000.000/[1 + 0,04(60/360)] \\ &\quad + 10.000.000/[1 + 0,04(150/360)] \\ X_3 &= 15.000.000 + 34.768.211,92 + 9.836.065,57 = \text{S/}. 59.604.277,49 \end{aligned}$$

Respuesta

La segunda propuesta S/. 59.604.391,78

8. En este problema, a la empresa le interesa la propuesta más baja; para los cálculos se utiliza el criterio del valor actual.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad X_1 &= 60.000.000 + 60.000.000/[1 + 0,18(150/360)] \\ X_1 &= 60.000.000 + 55.813.953,45 = \text{S/}. 115.813.953,45 \\ \\ \text{b)} \quad X_2 &= 30.000.000 + 90.000.000/[1 + 0,18(120/360)] \\ X_2 &= 30.000.000 + 84.905.660,38 = \text{S/}. 114.905.660,38 \\ \\ \text{c)} \quad X_3 &= 10.000.000 + 110.000.000/[1 + 0,18(90/360)] \\ X_3 &= 10.000.000 + 105.263.157,9 = \text{S/}. 115.263.157,9 \end{aligned}$$

Respuesta

Le conviene la propuesta b), S/. 114.905.660,38

9. Se calcula el tiempo en días.

Julio	31	17		
Agosto	31	31		
Septiembre	30	30	15	
Octubre	31	31	31	16
Noviembre	30	30	30	30
Diciembre	31	31	31	31
Total	184	170	107	77 días

Se calcula el interés simple en cada transacción:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\text{Interés del depósito de apertura:} \\ &I = 100.000(0,18)(184/360) = + \text{S/}. 9.200 \end{aligned}$$

b) Interés del depósito del 14 de julio:
 $I = 20.000(0,18)(170/360) = + S/. 1.700$

c) Interés en contra del retiro del 15 de septiembre:
 $I = 30.000(0,18)(107/360) = - S/. 1.605$

d) Interés del depósito del 15 de octubre:
 $I = 150.000(0,18)(77/360) = + S/. 5.775$

Total intereses: S/. 16.675 a favor y S/. 1.605 en contra; lo cual da un neto de S/. 15.070 para acreditarse en la cuenta.

El saldo a 31 de diciembre, sin intereses, es S/. 240.000

En consecuencia la cuenta tendrá un acumulado, a 31 de diciembre, de:
 $240.000 + 15.070 = S/. 255.070$

10. Para esta segunda forma de liquidación se calcula el tiempo que transcurre entre cada transacción:

a)	Hasta el 14 de julio:	14 días
b)	Del 15 de julio al 15 de septiembre:	63 días
c)	Del 15 de septiembre al 15 de octubre:	30 días
d)	Del 15 de octubre al 31 de diciembre:	77 días
	Total	184 días

Luego se calcula el interés simple sobre el valor de los saldos:

a) Con el valor de apertura de la cuenta de ahorros:
 $I = 100.000(0,18)(14/360) = S/. 700$

b) Con el saldo a 14 de julio (depósito de S/. 20.000)
 $I = 120.000(0,18)(63/360) = S/. 3.780$

c) Con el saldo a 15 de septiembre (retiro de S/. 30.000):
 $I = 90.000(0,18)(30/360) = S/. 1.350$

d) Con el saldo a 15 de octubre (depósito de S/. 150.000):
 $I = 240.000(0,18)(77/360) = S/. 9.240$

Total intereses: S/. 15.070

Saldo de la cuenta con intereses:

$240.000 + 15.070 = S/. 255.070$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Qué es una ecuación de valor?
2. ¿Qué utilidad tienen las ecuaciones de valor?
3. En la comparación de ofertas para comprar o para vender, ¿qué fecha focal se debe utilizar? ¿Por qué?
4. ¿Cómo se calcula el tiempo para plantear una ecuación de valor?
5. En una comparación de ofertas en las que hay 5 propuestas diferentes, ¿se debe hacer una ecuación por cada oferta o una sola para todas? ¿Por qué?
6. En una serie de depósitos mensuales durante 5 meses, ¿cuál debe ser la fecha focal para calcular el monto?
7. En una serie de pagos efectuados durante 5 meses para cancelar una deuda, ¿cuál debe ser la fecha focal?
8. ¿Qué es una cuenta de ahorros?
9. ¿Cómo se pueden liquidar los intereses en una cuenta de ahorros?
10. ¿Se pueden liquidar los intereses en las cuentas de ahorros tomando los saldos? ¿Por qué?

Capítulo

5

INTERÉS COMPUESTO

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Interés compuesto

Comparación interés simple-interés compuesto

Variables del interés compuesto

Fórmula del monto a interés compuesto

Monto compuesto con periodos de capitalización fraccionarios

Tasas equivalentes

Fórmula de equivalencia tasa nominal-tasa efectiva

Alternativas de inversión, comparando tasas de interés

Tasa de interés anticipada

Cálculo de la tasa de interés

Cálculo del tiempo en interés compuesto

El valor actual a interés compuesto, o cálculo del capital

Precio de un documento

Valor actual con tiempo fraccionario

Descuento compuesto

Ecuaciones de valor en interés compuesto

Comparación de ofertas

Reemplazo de las obligaciones por dos pagos iguales

Tiempo equivalente

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso








JUSTIFICACIÓN

El conocimiento y manejo del interés compuesto es necesario en las operaciones financieras a largo plazo, en operaciones de inversiones de capital, en los cálculos del monto del interés y del tiempo. Este tipo de interés se va capitalizando de acuerdo con el tiempo, medido en periodos de capitalización o de conversión. Igualmente, el concepto y aplicación del valor actual es básico en el interés compuesto para manejar en documentos e inversiones financieras en el largo plazo.

OBJETIVO GENERAL

Conocer el concepto de interés compuesto y sus aplicaciones en la liquidación de documentos financieros, endeudamiento e inversiones a cualquier plazo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Conocer y manejar los conceptos periodo de capitalización y tasa de interés por periodo de capitalización.
-  Conocer y manejar la fórmula del monto en interés compuesto.
-  Conocer y aplicar el concepto de valor actual a largo plazo.
-  Conocer y aplicar en inversiones las tasas de interés nominal y efectiva, anticipada y vencida.
-  Resolver problemas de interés compuesto aplicando ecuaciones de valor.

CONDUCTA DE ENTRADA

Seleccione la respuesta correcta.

1. ¿El interés compuesto se aplica a largo plazo?
Sí _____ No _____
2. ¿En el interés simple se capitalizan los intereses por periodo?
Sí _____ No _____

3. ¿Capitalizar los intereses significa adicionar al capital los intereses en cada periodo?
Sí _____ No _____
4. ¿Un capital colocado a interés simple produce un monto mayor al colocado a interés compuesto?
Sí _____ No _____
5. ¿Un periodo de capitalización puede ser expresado en meses, bimestres, trimestres, cuatrimestres, semestres u otra unidad de tiempo?
Sí _____ No _____
6. ¿La diferencia entre el interés simple y el interés compuesto es la capitalización de los intereses en este último?
Sí _____ No _____
7. ¿El interés compuesto está en función directa con el capital y con la tasa de interés?
Sí _____ No _____
8. ¿Largo plazo significa menos de 1 mes?
Sí _____ No _____
9. ¿Una cuenta de ahorros puede aumentar los intereses al capital?
Sí _____ No _____
10. ¿Capitalizar significa añadir intereses al capital por periodo?
Sí _____ No _____

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

1. Sí 2. No 3. Sí 4. No 5. Sí
6. Sí 7. Sí 8. No 9. Sí 10. Sí

INTERÉS COMPUESTO

*"Es el interés de un capital al que se van acumulando los réditos para que produzcan otros"¹.
"Cuando se calcula interés compuesto, el capital aumenta por la adición de los intereses vencidos al final de cada uno de los periodos a que se refiere la tasa. Siempre que no se pague efectivamente el interés al final de un periodo, sino que se adicione al capital, se dice que los intereses se capitalizan"².*

1. Ortells. *Op. cit.*

2. Justin Moore H. *Manual de matemáticas financieras*. Ed. Uteha. México, reimpresión, 1973, p. 68.

El interés compuesto se caracteriza porque el interés generado, en una unidad de tiempo, se suma al capital y este valor nuevamente gana intereses y se acumula al nuevo capital, y así sucesivamente, tantas veces como periodos de capitalización se hayan establecido.

COMPARACIÓN INTERÉS SIMPLE-INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto se diferencia del interés simple en que éste calcula los intereses por una sola vez, mientras que en aquél el interés se va acumulando al capital periódicamente; es decir, los intereses se capitalizan. Generalmente, el interés simple se utiliza a corto plazo, hasta un año, y el interés compuesto a largo plazo, más de un año.

EJEMPLO 5.1

Calcular el monto, el interés simple y el interés compuesto de un capital de S/. 4.000.000 a una tasa de interés de 10% durante 5 periodos.

Cálculo a interés simple:

$$I = Cit; I = 4.000.000(0,10)(5) = S/. 2.000.000$$

$$M = C (1 + it) = 4.000.000 [1 + 0,10(5)] = S/. 6.000.000$$

74

Cálculo a interés compuesto:

(Para el primer periodo)

$$M = 4.000.000 [1 + 0,10(1)] = S/. 4.400.000$$

(Para el segundo periodo)

$$M = 4.400.000 [1 + 0,10(1)] = S/. 4.840.000$$

(Para el tercer periodo)

$$M = 4.840.000 [1 + 0,10(1)] = S/. 5.324.000$$

(Para el cuarto periodo)

$$M = 5.324.000 [1 + 0,10(1)] = S/. 5.856.400$$

(Para el quinto periodo)

$$M = 5.856.400 [1 + 0,10(1)] = S/. 6.442.040$$

Se puede notar la diferencia, en el mismo tiempo y con la misma tasa de interés, del monto total que producen:

Monto con interés simple: S/. 6.000.000

Monto con interés compuesto: S/. 6.442.040

En el siguiente cuadro (y en los gráficos adjuntos) se demuestra el comportamiento del interés simple y el interés compuesto, y sus respectivos montos:

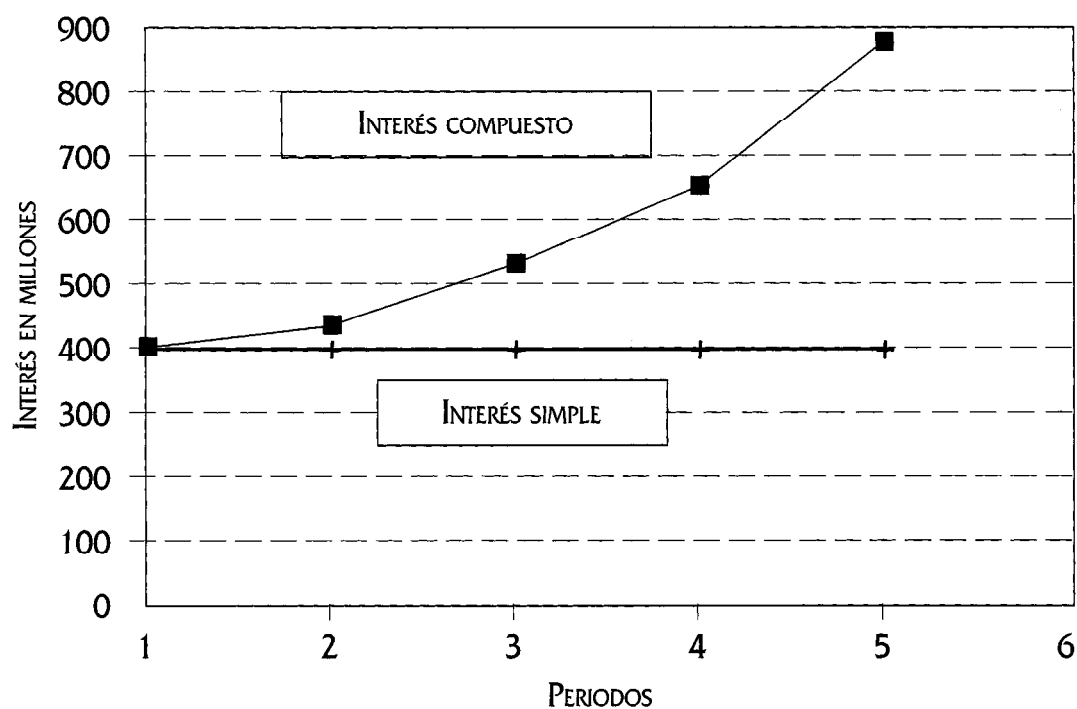
Periodo	Monto interés simple	Monto interés compuesto	Diferencia
1	S/. 4.400.000	S/. 4.400.000	
2	4.800.000	4.840.000	S/. 40.000
3	5.200.000	5.324.000	124.000
4	5.600.000	5.856.400	256.400
5	6.000.000	6.442.040	442.040

Como se observa, la diferencia entre el monto a interés simple y el monto a interés compuesto radica en que este último se va acrecentando en función del tiempo, debido a la acumulación de los intereses al capital por periodo de capitalización.

El interés compuesto crece en función del nuevo capital por periodo, mientras que el interés simple es constante durante todos los periodos.

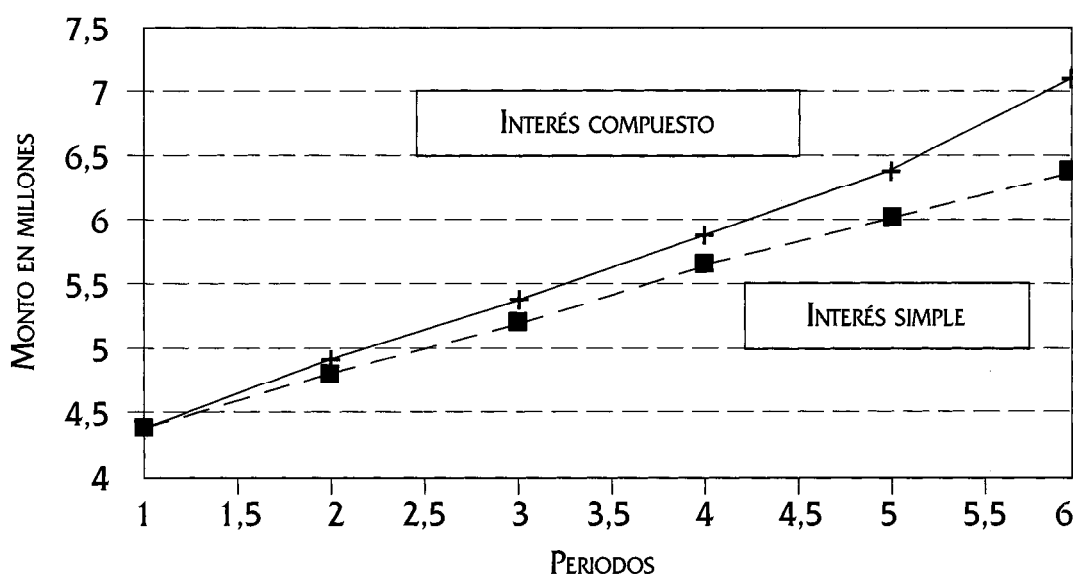
COMPARACIÓN

INTERÉS SIMPLE - INTERÉS COMPUESTO



COMPARACIÓN MONTO

INTERÉS SIMPLE - INTERÉS COMPUESTO



VARIABLES DEL INTERÉS COMPUESTO

En el cálculo del interés compuesto se debe tomar en cuenta previamente el cálculo de las variables i y n , correspondientes a la tasa de interés por periodo de capitalización (i) y el número de periodos de capitalización (n).

Periodo de capitalización (n)

Se denomina *periodo de capitalización*, el espacio de tiempo en el que el interés se adiciona o acumula al capital. Este periodo puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, etc.; se identifica con la letra n .

Tasa de interés (i)

La tasa de interés por periodo de capitalización significa la tasa diaria, mensual, bimestral, trimestral, semestral, anual, etc.; dependiendo de si la capitalización es cada día, mes, bimestre, trimestre, semestre, año, se identifica con la letra i .

EJEMPLO 5.2

Calcular el número de periodos de capitalización y la tasa de interés por periodo de capitalización de un capital colocado a interés compuesto durante 7 años, con una tasa de interés de 15% anual capitalizable semestralmente.

$$t = 7 \text{ años. Entonces, } n = 7(12)/6 = 14$$

$$n = \frac{\text{Número total de meses}}{\text{Número de meses del periodo de capitalización}}$$

Es decir, que se capitaliza 14 veces o que existen 14 semestres en 7 años.

$$i = 0,15/2 = 0,075$$

$$i = \frac{\text{tasa anual}}{\text{número de capitalizaciones en el año}} = \frac{\text{tasa anual}}{m}$$

$$m = \frac{360}{\text{\# días del periodo}} \quad m = 360/180 = 2$$

EJEMPLO 5.3

Calcular el número de periodos de capitalización (n) y la tasa de interés por periodo de capitalización (i) de un capital colocado a interés compuesto durante 9 años, con una tasa de interés de 24%, capitalizable semestralmente.

$$t = 9 \text{ años; tasa nominal anual } i = 24\%$$

$$n = 9(12)/6 = 18$$

$$i = \frac{0,24}{2} = 0,12$$

EJEMPLO 5.4

Calcular el número de periodos de capitalización (n) y la tasa de interés por periodo de capitalización (i); de un capital colocado a interés compuesto durante 5 años, a una tasa de interés de 15% anual, capitalizable trimestralmente.

$$t = 5 \text{ años}$$

$$i = 15\%$$

$$n = 5(12)/3 = 20; \text{ se divide entre el número de meses del periodo}$$

$$m = 360/90 = 4; \text{ se capitaliza 4 veces en el año}$$

$$i = \frac{0,15}{4} = 0,0375 = 3,75\% \text{ trimestral.}$$

FÓRMULA DEL MONTO A INTERÉS COMPUESTO

“El monto de un capital a interés compuesto, o monto compuesto, es el valor del capital final o capital acumulado después de sucesivas adiciones de los intereses”³.

3. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 70.

"A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como interés compuesto"⁴.

Para deducir la fórmula del monto de interés compuesto, se parte de un ejemplo en el que se conoce el capital, la tasa de interés y el número de periodos de capitalización.

EJEMPLO 5.5

Calcular el monto a interés compuesto de un capital de S/. 100.000 a cuatro años de plazo, a una tasa de interés de 12% anual.

Para resolver el problema se elabora un cuadro en el que se expresan los periodos, los intereses y el monto.

Periodo	Capital al inicio del periodo	Interés	Monto al final del periodo
1	100.000	12.000	112.000
2	112.000	13.440	125.440
3	125.440	15.052,80	140.492,80
4	140.492,80	16.859,14	157.351,94

Fórmula de cálculo: $I = Cit$

Primer año

$$I = 100.000(0,12)1 = \text{S/. } 12.000$$

$$M = 100.000 + 12.000 = \text{S/. } 112.000$$

Segundo año

$$I = 112.000(0,12)1 = \text{S/. } 13.440,00$$

$$M = 112.000 + 13.440 = \text{S/. } 125.440$$

Tercer año

$$I = 125.440(0,12)1 = \text{S/. } 15.052,80$$

$$M = 125.440 + 15.052,80 = \text{S/. } 140.492,80$$

Cuarto año

$$I = 140.492,80(0,12)1 = \text{S/. } 16.859,14$$

$$M = 140.492,80 + 16.859,14 = \text{S/. } 157.351,94$$

En este ejemplo, C es el capital; i la tasa de interés por periodo de capitalización; y n , el número de periodos de capitalización. Así, se tiene el cuadro siguiente:

4. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, p. 63.

Periodo	Capital inicio periodo	Interés	Monto
1	C	C <i>i</i>	$C + Ci = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$C(1 + i)i$	$C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 i$	$C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 i = C(1 + i)^3$
4			
.			
.	Podemos continuar hasta la enésima potencia:		
<i>n</i>	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-1} i$	$C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^{n-1} i = C(1 + i)^n$

Entonces, para cualquier periodo de capitalización y tasa de interés por periodo, se obtiene la fórmula del monto en interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^n \quad (5.1)$$

Entonces,

$$I = M - C \quad (5.2)$$

El factor $(1 + i)^n$ puede hallarse mediante calculadoras electrónicas, variando *i* y *n*; o buscarse en tablas matemáticas en función de las referidas variables.

La fórmula del monto también puede expresarse tomando en cuenta los periodos de capitalización menores de un año: semestral, trimestral, bimestral, mensual, diaria o continua.

$$M = C(1 + j/m)^{m \cdot t} \quad (5.3)$$

M = Monto

C = Capital inicial

j = tasa de interés nominal capitalizable varias veces

m = número de capitalizaciones en el año

t = número de años

Si la capitalización es anual (tasa efectiva), la fórmula del monto en un año es:

$$M = C(1 + i)^n$$

Si la capitalización es semestral,

$$M = C(1 + j/2)^2$$

Si la capitalización es trimestral,

$$M = C(1 + j/4)^4$$

Si la capitalización es bimestral,

$$M = C(1 + j/6)^6$$

Si la capitalización es mensual,

$$M = C(1 + j/12)^{12}$$

Si la capitalización es quincenal,

$$M = C(1 + j/24)^{24}$$

Si la capitalización es diaria,

$$M = C(1 + j/360)^{360} \text{ o, } M = C(1 + j/365)^{365}$$

Si la capitalización es continua o instantánea, el valor del capital se capitaliza continuamente.

$$M = C(e)^{j \cdot t}$$

$$e = 2,718281$$

j = tasa nominal

C = capital inicial

M = monto

t = número de años

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 2,718281$$

EJEMPLO 5.6

Calcular el monto de un capital de S/. 200.000 a interés compuesto durante 5 años, si la tasa de interés es 12% anual capitalizable en la siguiente forma:

Tasa de 12% efectiva

$$M = 200.000(1 + 0,12)^5 = \text{S/. } 352.468,34$$

Tasa de 12% anual capitalizable semestralmente

$$M = 200.000(1 + 0,12/2)^{10} = \text{S/. } 358.169,54$$

Tasa de 12% anual capitalizable trimestralmente

$$M = 200.000(1 + 0,12/4)^{20} = \text{S/. } 361.222,25$$

Tasa de 12% anual capitalizable bimestralmente

$$M = 200.000(1 + 0,12/6)^{30} = \text{S/. } 362.272,32$$

Tasa de 12% anual capitalizable mensualmente

$$M = 200.000(1 + 0,12/12)^{60} = \text{S/. } 363.339,34$$

Tasa de 12% anual capitalizable diariamente

$$M = 200.000(1 + 0,12/360)^{1.800} = \text{S/. } 364.387,33$$

Tasa de 12% anual con capitalización continua

$$M = 200.000(2,718281)^{(0,12)(5)} = \text{S/. } 364.423,76$$

Como se puede notar, cuando el periodo de capitalización aumenta, se incrementan el monto y el interés compuesto.

EJEMPLO 5.7

Una empresa obtiene un préstamo de S/. 3.000.000 a 6 años de plazo, con una tasa de interés de 15% anual capitalizable semestralmente. Calcular el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento y el interés.

Se calculan i y n :

$$n = 6 (12)/6 = 12 \text{ periodos}$$

$$i = \frac{0,15}{2} = 0,075 = 7,5\% \text{ semestral}$$



$$C = 3.000.000$$

$$M = 3.000.000 (1 + 0,075)^{12} = 3.000.000 (1,075)^{12}$$

$$M = 3.000.000 (2,381780) = S/. 7.145.338,80$$

Interés compuesto que debe pagar:

$$I = M - C$$

$$I = 7.145.338,80 - 3.000.000 = S/. 4.145.338,80$$

MONTO COMPUESTO CON PERIODOS DE CAPITALIZACIÓN FRACCIONARIOS

Cuando el tiempo de pago no coincide con el periodo de capitalización, se presenta el caso de los periodos de capitalización fraccionarios.

EJEMPLO 5.8

El tiempo de pago de una deuda es 4 años y 9 meses y la tasa de interés, 14% capitalizable semestralmente.

Se tiene que:

$$n = \frac{4(12) + 9}{6} = \frac{57}{6} = \frac{54}{6} + \frac{3}{6} = 9,5 \text{ semestres}$$

es decir, 9 semestres y una fracción de semestre.

Para el cálculo del monto compuesto con periodos de capitalización fraccionario pueden aplicarse dos métodos⁵:

- a) El matemático, que toma el valor exacto de n en la fórmula del monto compuesto.
- b) El comercial (ver página siguiente).

EJEMPLO 5.9

Calcular el monto de una deuda de S/. 4.000.000 a interés compuesto durante 6 años y 3 meses de plazo, con una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente.

$$n = \frac{(6)(12) + 3}{6} = \frac{75}{6} = \frac{72}{6} + \frac{3}{6} = 12,5 \text{ semestres}$$

$$n = \frac{0,14}{2} = 0,07$$

$$M = 4.000.000 (1 + 0,07)^{12,5} = 4.000.000 (2,329685)$$

$$M = S/. 9.318.740,40$$

5. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 75.

- b)** El comercial, que aplica la parte entera de n en la fórmula del monto compuesto (interés compuesto), y la parte fraccionaria en la fórmula del monto de interés simple. En otras palabras, el método comercial aplica interés compuesto a la parte entera e interés simple a la parte fraccionaria.

En el ejemplo anterior, con el método comercial se tiene:

$$M = 4.000.000(1,07)^{12} \left[1 + 0,07 \left(\frac{3}{6} \right) \right]^*$$

$$M = 4.000.000 (2,25219159)(1,035) = S/. 9.324.073,18$$

También se puede solucionar así el mismo problema:

$$M = 4.000.000(1,07)^{12} \left[1 + 0,14 \left(\frac{90}{360} \right) \right] = S/. 9.324.073,18$$

Como puede apreciarse, el método comercial da un resultado mayor que el método matemático.

EJEMPLO 5.10

Calcular por los dos métodos, el matemático y el comercial, el monto compuesto de S/. 2.000.000 a 7 años y 8 meses de plazo, a 18% anual capitalizable trimestralmente.

Método matemático

Se calcula el valor de n e i :

$$n = \frac{(7)(12) + 8}{3} = \frac{84 + 8}{3} = \frac{90}{3} + \frac{2}{3} = 30,666667$$

$$i = \frac{0,18}{4} = 0,045$$

Se aplica la fórmula del monto:

$$M = 2.000.000 (1+0,045)^{30,666667} = S/. 7.713.702,80$$

Método comercial

$$n = \frac{(7)(12) + 8}{3} = \frac{90}{3} + \frac{2}{3} = 30 + \frac{2}{3} \text{ periodos}$$

$$i = \frac{0,18}{4} = 0,045$$

$$M = 2.000.000 (1,045)^{30} \left[1 + 0,045 \left(\frac{2}{3} \right) \right]$$

* En este procedimiento es necesario resaltar que en la parte del cálculo con interés simple debe relacionarse la tasa de interés por periodo, con los meses o días que tiene el correspondiente periodo.

$$M = 2.000.000 (3,745318) (1,03) = S/. 7.715.355,36$$

También se puede expresar así:

$$M = 2.000.000 (1,045)^{30} \left[1 + 0,18 \left(\frac{60}{360} \right) \right]$$

$$M = 2.000.000 (3,745318) (1,03) = S/. 7.715.355,36$$

Diferencia entre los resultados obtenidos por dos métodos:

$$7.715.355,36 - 7.713.702,80 = S/. 1.652,56$$

Esto se debe a la diferente aplicación del interés en el tiempo fraccionario (dentro de los dos últimos meses se acumula el interés).

TASAS EQUIVALENTES

La Tasa nominal. Tasa nominal es aquella que puede ser capitalizable varias veces en un año, y se denomina (*j*).

Tasa efectiva de interés. La tasa efectiva es la que realmente actúa sobre el capital una vez en el año, y se denomina (*i*).

"Se dice que dos tasas anuales de interés con diferentes periodos de conversión (capitalización) son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final de un año"⁶.

"Las tasas nominal y efectiva son equivalentes cuando producen la misma cantidad de dinero al final del año"⁷.

EJEMPLO 5.11

Un capital de S/. 1, a 18% anual capitalizable mensualmente, será:

$$M = 1 \left(1 + \frac{0,18}{12} \right)^{12} = 1 (1,015)^{12} = 1 (1,1956182)$$

$$M = S/. 1,1956182$$

A una tasa de interés efectiva de 19,56182%

$$M = 1 (1 + 0,195618) = 1 (1,195618)$$

$$M = S/. 1,195618$$

En este ejemplo se puede apreciar que la tasa nominal, 18% anual capitalizable mensualmente, es equivalente a la tasa efectiva de 19,56182%, puesto que las dos producen el mismo resultado.

6. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, p. 65.

7. Justin Moore J. *Op. cit.*, p 92.

FÓRMULA DE EQUIVALENCIA TASA NOMINAL-TASA EFECTIVA

El monto de S/. 1, a la tasa i en un año, es

$$1(1+i) = 1+i = M$$

El monto de S/. 1, a la tasa j con m capitalizaciones en el año, es

$$M = (1 + j/m)^m$$

Considerando que los dos montos son iguales, se puede plantear la identidad

$$(1+i) = (1+j/m)^m \quad (5.4)$$

que es la ecuación de equivalencia, con tasas de interés vencidas.

Tasas equivalentes son aquellas tasas que, con diferentes periodos de capitalización, producen el mismo interés compuesto.

EJEMPLO 5.12

¿A qué tasa efectiva de interés equivale una tasa nominal de 18% anual capitalizable trimestralmente?

$$(1+i) = (1+j/m)^m$$

En este caso:

$$i = ?, \quad j = 18\%, \quad m = 4$$

$$(1+i) = (1+0,18/4)^4;$$

$$(1+i) = (1+0,045)^4$$

$$(1+i) = (1,045)^4;$$

$$(1+i) = 1,1925186$$

$$i = 1,1925186 - 1 = 0,1925186$$

$$i = 19,25186\%$$

También se puede plantear el problema inverso: ¿a qué tasa nominal capitalizable trimestralmente es equivalente una tasa efectiva de 19,25186%?

Para la solución de este problema utilizamos la ecuación de equivalencia:

$$(1+i) = (1+j/m)^m$$

y remplazamos:

$$(1+0,1925186) = (1+j/4)^4$$

$$(1,1925186) = (1+j/4)^4$$

Para encontrar la respuesta se pueden emplear dos métodos: exponentes o radicales, y logaritmos.

Por exponentes o radicales

Elevamos ambos miembros a la misma potencia y la igualdad no se altera.

$$(1,192518)^{1/4} = \left[1 + \frac{j}{4} \right]^{4/4}$$

$$1,045 = 1 + \frac{j}{4}$$

$$1,045 - 1 = \frac{j}{4}$$

$$0,045 = \frac{j}{4}$$

$$4(0,045) = j$$

$$j = 0,18 \quad j = 18\%$$

Por logaritmos

$$\log(1,192518) = \log(1 + j/4)^4$$

$$0,076465 = 4 \log(1 + j/4)$$

$$\frac{0,076465}{4} = \log(1 + j/4)$$

$$0,019116 = \log(1 + j/4)$$

$$\text{antilog}(0,019116) = 1 + j/4$$

$$1,045 = 1 + j/4$$

$$1,045 - 1 = j/4$$

$$0,045 = j/4$$

$$4(0,045) = j$$

$$j = 0,18 \quad j = 18\%$$

Se obtiene la misma respuesta: $j = 18\%$

EJEMPLO 5.13

¿A qué tasa nominal capitalizable semestralmente es equivalente la tasa efectiva de 16%?

$$(1 + i) = (1 + j/m)^m$$

Por exponentes o radicales

$$1 + 0,16 = (1 + j/2)^2$$

en razón de que la capitalización es semestral

$$1,16 = (1 + j/2)^2$$

$$(1,16)^{1/2} = ((1 + j/2)^2)^{1/2}$$

(se elevan ambos miembros a la potencia 1/2)

$$1,077033 = 1 + j/2$$

$$1,077033 - 1 = j/2$$

$$0,077033 = j/2$$

$$\begin{aligned} 2(0,077033) &= j \\ 0,154066 &= j \\ j &= 15,4066\% \end{aligned}$$

Por logaritmos

$$\begin{aligned} \log(1,16) &= \log(1 + j/2)^2 \\ 0,064457 &= 2 \log(1 + j/2) \\ \frac{0,064457}{2} &= \log(1 + j/2) \\ 0,032228 &= \log(1 + j/2) \\ \text{antilog}(0,032228) &= 1 + j/2 \\ 1,077033 &= 1 + j/2 \\ 1,077033 - 1 &= j/2 \\ (0,077033) 2 &= j \\ 0,154065 &= j \\ j &= 15,4066\% \end{aligned}$$

Como se puede notar, al comparar la misma tasa de interés, la tasa efectiva es mayor cuando se capitaliza más de una vez en el año.

$$16\% > 15,40659\%$$

También puede plantearse el problema inverso: ¿a qué tasa efectiva es equivalente la tasa nominal de 15,40659% capitalizable semestralmente?

$$\begin{aligned} (1 + i) &= (1 + j/m)^m \\ 1 + i &= \left(1 + \frac{0,1540659}{2} \right)^2 \\ 1 + i &= (1,077033)^2 \\ 1 + i &= 1,16 \\ i &= 1,16 - 1 \\ i &= 0,16 \\ i &= 16\% \end{aligned}$$

ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN, COMPARANDO TASAS DE INTERÉS

Cuando se requiere invertir determinado capital en el mercado financiero, es frecuente encontrar tasas de interés con diferentes tipos de capitalización, por lo que necesitamos analizar en forma matemática cuál es la mejor alternativa, utilizando la ecuación de equivalencia (fórmula 5.4).

EJEMPLO 5.14

Una persona desea invertir S/. 6.000.000 durante dos años y tiene las siguientes opciones: **a)** una tasa de interés de 44,5% efectiva; **b)** Una tasa de interés de 41% anual capitalizable semestralmente; **c)** una tasa de interés de 39,5% anual capitalizable trimestralmente; **d)** una tasa de interés de 38% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál opción le produce mayor interés?

Este problema se puede solucionar de dos formas: *analíticamente*, utilizando la ecuación de equivalencia, o *prácticamente*, utilizando la fórmula del monto con interés compuesto.

Analíticamente

Se compara la tasa efectiva de 44,5% con las demás:

Con tasa de interés de 41% anual capitalizable semestralmente

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,41}{2} \right)^2$$

$$i = 1,452025 - 1$$

$$i = 0,452025$$

$$i = 45,2025\%$$

Con la tasa de interés de 39,5% anual capitalizable trimestralmente

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,395}{4} \right)^4$$

$$i = 1,457456 - 1$$

$$i = 0,457456$$

$$i = 45,745633\%$$

Con tasa de interés de 38% anual capitalizable mensualmente

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,38}{12} \right)^{12}$$

$$i = 1,453693 - 1$$

$$i = 45,369328\%$$

La mejor oferta es la tercera, $i = 39,5\%$ anual capitalizable trimestralmente, que da una tasa efectiva de 45,745633%.

Prácticamente

Se calcula con los datos de capital, tiempo y tasa de interés:

Con tasa efectiva de 44,5%

$$M = 6.000.000 (1 + 0,445)^2 = \text{S/}. 12.528.150$$

Con tasa de 41% anual capitalizable semestralmente

$$M = 6.000.000 (1 + 0,41/2)^4 = \text{S/}. 12.650.259,60$$

Con tasa de 39,5% anual capitalizable trimestralmente

$$M = 6.000.000 (1 + 0,395/4)^8 = \text{S/}. 12.745.073,81$$

Con tasa de 38% anual capitalizable mensualmente

$$M = 6.000.000(1 + 0,38/12)^{24} = S/. 12.679.344,96$$

La mejor oferta es la tercera, con un monto de S/. 12,745.073,81. La respuesta hallada por la forma analítica siempre debe coincidir con la encontrada por la forma práctica, como se vio en el ejemplo.

TASA DE INTERÉS ANTICIPADA

La tasa de interés anticipada es aquella que permite pagar o cobrar los intereses por adelantado; para la aplicación se utiliza la siguiente fórmula (para demostrarla se recurre a la ecuación de equivalencia (fórmula 5.4) y el descuento bancario):

$$1 + i = (1 + j/m)^m$$

Conociendo que j es una tasa de interés anticipada, se puede establecer que

$$j = \frac{d}{1 - d}$$

$$\text{Entonces, } j = \frac{d/m}{1 - d/m}$$

Llevando este criterio a la ecuación de equivalencia, se tiene:

$$1 + i = \left(1 + \frac{d/m}{1 - d/m}\right)^m$$

Simplificando,

$$1 + i = \left(\frac{1 - d/m + d/m}{1 - d/m}\right)^m$$

$$1 + i = \left(\frac{1}{1 - d/m}\right)^m$$

$$1 + i = \frac{1}{(1 - d/m)^m}$$

$$1 + i = (1 - d/m)^{-m} \quad (5.5)$$

EJEMPLO 5.15

¿A que tasa de interés efectiva anticipada es equivalente una tasa anticipada de 48% anual capitalizable cuatrimestralmente?

$$m = 360/120 = 3$$

$$1 + i = (1 - 0,48/3)^{-3} \quad (\text{fórmula 5.5})$$

$$i = 1,68718281 - 1$$

$$i = 0,687183$$

$$i = 68,7183\%$$

También se puede plantear el problema inverso.

EJEMPLO 5.16

¿A qué tasa de interés anticipada anual, capitalizable cuatrimestralmente, es equivalente una tasa efectiva anticipada de 68,7183%?

$$1 + 0,687183 = (1 - j/3)^{-3}$$

$$(1,687183)^{-1/3} = \{(1 - j/3)^{-3}\}^{-1/3}$$

$$0,84 = 1 - j/3$$

$$1 - 0,84 = j/3$$

$$(0,16)3 = j$$

$$0,48 = j$$

$$j = 48\%$$

La diferencia entre la tasa de interés vencida y anticipada se puede apreciar en el siguiente cuadro.

Interés efectivo equivalente

	Número de meses anticipados							Número de meses vencidos					
Interés anual	12	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
42%	72,41	60,23	58,69	57,22	55,85	54,56	53,35	51,11	50,07	49,09	48,15	47,26	46,41
45%	81,82	66,49	64,60	63,83	61,19	59,64	58,19	55,55	54,33	53,18	52,09	51,05	50,06
48%	92,31	73,13	70,84	68,72	66,75	64,62	63,21	60,10	58,69	57,35	56,09	54,89	53,76

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

La tasa efectiva o nominal puede calcularse partiendo de la fórmula del monto a interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^n ; M = C(1 + j/m)^{m \cdot t}$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

Para despejar i , se presentan tres alternativas:

Utilizando logaritmos

$$\log(M/C) = \log(1 + i)^n$$

$$\log(M/C) = n \log(1 + i)$$

$$\frac{\log(M/C)}{n} = \log(1 + i)$$

Para el cálculo de i se emplea el antilogaritmo. Utilizando exponentes o radicales

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

$$(M/C)^{1/n} = [(1 + i)^{1/n}]$$

Se elevan ambos miembros a la potencia $1/n$

$$(M/C)^{1/n} = 1 + i$$

y se simplifica el exponente en el segundo miembro

$$(M/C)^{1/n} - 1 = i$$

Existe también un tercer método, la interpolación de tablas, que se realiza en forma similar a la interpolación logarítmica, pero con la facilidad de las calculadoras electrónicas; este método casi no se utiliza por la falta de tablas para determinados tipos de interés.

$$M/C = (1 + i)^n$$

Se busca en las tablas, para un determinado periodo, la cantidad que se aproxima al cociente M/C . Si no se encuentra exactamente, se procede a interpolar.

EJEMPLO 5.17

¿A qué tasa efectiva se convertirá un capital de \$/. 300.000 en un monto de \$/. 450.000, en 6 años?

$$M = C (1 + i)^n$$

$$M/C = (1 + i)^n$$

$$\frac{450.000}{300.000} = (1 + i)^6$$

$$1,5 = (1 + i)^6$$

Por logaritmos

$$\log 1,5 = \log(1 + i)^6$$

$$\log 1,5 = 6 \log(1 + i)$$

$$\frac{0,176091}{6} = \log(1 + i)$$

$$0,029348 = \log(1 + i)$$

$$\text{antilog } 0,029348 = 1 + i$$

$$1,069913 = 1 + i$$

$$0,069913 = i$$

$$i = 6,99132\%$$

Por exponentes

$$1,5 = (1 + i)^6$$



$$\begin{aligned}
 (1,5)^{1/6} &= (1+i)^{6/6} \\
 (1,5)^{0,16666} &= 1+i \\
 1,069913 &= 1+i \\
 i &= 6,99132\%
 \end{aligned}$$

Por interpolación de tablas

$$1,5 = (1+i)^6$$

Se busca en tablas de $(1+i)^n$ cuando $n=6$

7%	1,50073035	1,50000000
6,5%	1,45914230	1,45914230
0,5%	0,04158805	0,04085770

Se plantea una regla de tres simple, comparando la diferencia tabular de 0,041588 con la diferencia entre la cantidad dada y la menor en la tabla, que corresponde a 0,040857.

$$\begin{array}{rcl}
 0,005 & \text{---} & 0,041588 \\
 X & \text{---} & 0,040857 \\
 X = & & 0,004912
 \end{array}$$

Se suma este resultado al menor

$$\begin{array}{r}
 0,065 \\
 0,004912 \\
 \hline
 0,069912
 \end{array}$$

y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 i &= 0,069912 \\
 i &= 6,9912\%, \text{ aproximadamente.}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.18

¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, se convertirá un capital de S/. 400.000 en 3/4 veces más en 5 años? ¿A qué tasa de interés efectiva es equivalente?

Solución

$$M = C + I$$

$$C = \text{S/. } 400.000$$

$$M = 400.000 + 3/4 (400.000) = \text{S/. } 700.000$$

$$t = 5; m = 4; m \cdot t = 20$$

$$M/C = (1 + j/m)^{m \cdot t}$$

$$\frac{700.000}{400.000} = (1 + j/4)^{20}$$

$$(1,75)^{1/20} = (1 + j/4)^{20/20}$$

$$(1,75)^{1/20} = 1 + j/4$$

$$1,028376 = 1 + j/4$$

$(0,028376)^4 = j$
 $0,113504 = j$
 $j = 11,3504\%$ anual, capitalizable trimestralmente.

EJEMPLO 5.19

¿A qué tasa efectiva es equivalente la tasa de 11,35037% anual, capitalizable trimestralmente?

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,113504}{4} \right)^4$$

$$1 + i = (1 + 0,028376)^4$$

$$1 + i = (1,028376)^4$$

$$1 + i = 1,118427$$

$$i = 0,118427$$

$$i = 11,8427\% \text{ efectiva.}$$

CÁLCULO DEL TIEMPO EN INTERÉS COMPUESTO

Para calcular el tiempo, se debe hallar primero n ; por lo cual se aplica la fórmula del monto:

$$M = C(1 + i)^n$$

$$M = C(1 + j/m)^{m \cdot t}$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

Para hallar n existen dos alternativas: *por logaritmos*, utilizando calculadoras electrónicas o tablas logarítmicas.

$$\log \frac{M}{C} = \log(1 + i)^n$$

$$\log \frac{M}{C} = n \log(1 + i)$$

$$\frac{\log \frac{M}{C}}{\log(1 + i)} = n$$

No se requiere hallar el antilogaritmo, pues a n no le afecta la palabra logaritmo. *Por interpolación de tablas*, con la limitante de que a veces no hay tablas para todo tipo de interés.

EJEMPLO 5.20

¿En qué tiempo, expresado en años, meses y días, un capital de S/. 1.000.000 se convertirá en S/. 1.500.000 a una tasa de interés de 18% efectiva?

$$M = 1.500.000$$

$$C = 1.000.000$$

$$i = 18\%$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n; \frac{1.500.000}{1.000.000} = (1 + 0,18)^n$$

$$1,5 = (1,18)^n$$

$$\log 1,5 = n \log(1,18)$$

$$\frac{\log 1,5}{\log 1,18} = n$$

$$\frac{0,176091}{0,071882} = n$$

$$2,449726 = n \text{ (años)}$$

Para calcular el tiempo en años, meses y días se plantea una regla de tres (con el año comercial).

$$1 \text{ año} \quad \text{-----} \quad 360 \text{ días}$$

$$0,449726 \quad \text{-----} \quad X \text{ días}$$

$$X = (0,449726)(360)/1$$

$$X = 161,90 \text{ días} = 5 \text{ meses y } 12 \text{ días}$$

tiempo = 2 años, 5 meses y 12 días.

EJEMPLO 5.21

¿En qué tiempo, expresado en años, meses y días, se duplicará un capital de S/. 800.000, a una tasa de interés de 16% capitalizable semestralmente?

$$M = 800.000 (2) = S/. 1.600.000$$

$$C = S/. 800.000$$

$$j = \frac{0,16}{2} = 0,08$$

$$M/C = (1 + j/m)^{m \cdot t}$$

$$\frac{1.600.000}{800.000} = \left(1 + \frac{0,16}{2} \right)^{2 \cdot t}$$

$$2 = (1,08)^{2 \cdot t}$$

$$\log 2 = (2t) \log(1,08)$$

$$\frac{\log 2}{\log(1,08)} = 2t$$

$$\frac{0,301030}{0,033423} = 2t$$

$$9,006468 = 2t \text{ (semestres)}$$

$$\frac{9,006468}{2} = t$$

$$4,503234 = t \text{ (años)}$$

$$1 \text{ año} \quad \text{-----} \quad 360 \text{ días}$$

$$0,503234 \quad \text{-----} \quad X$$

$$X = 181,164 \text{ días}$$

tiempo = 4 años, 6 meses y 1 día (aproximadamente).

EJEMPLO 5.22

¿En qué tiempo un capital de S/. 2.500.000 se convertirá en S/. 5.625.000 a una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente?

$$M = \text{S/. } 5.625.000$$

$$C = \text{S/. } 2.500.000$$

$$j = 0,24$$

$$M/C = (1 + j/m)^{m \cdot t}$$

$$\frac{5.625.000}{2.500.000} = \left(1 + \frac{0,24}{12} \right)^{12 \cdot t}$$

$$2,25 = (1 + 0,02)^{12 \cdot t}$$

Por logaritmos

$$\log 2,25 = 12 t \log(1,02)$$

$$\log \frac{2,25}{(1,02)} = 12t$$

$$\frac{0,352182}{0,008600} = 12 t$$

$$40,950977 = 12 t \text{ (meses)}$$

$$\frac{40,950977}{12} = t \text{ (años)}$$

$$3.412501 = t \text{ (años)}$$

$$1 \quad \text{-----} \quad 360 \text{ días}$$

$$0,412501 \quad \text{-----} \quad X$$

$$X = 148,5 \text{ días}$$

$$\text{Tiempo} = 3 \text{ años, 4 meses y } 28,5 \text{ días}$$

Utilizando tablas de $(1 + i)^n$, se busca el valor correspondiente a 2,25.

$$\text{Para } i = 2\%$$

$$\text{cuando } n = 41, \text{ valor en tablas, } 2,252200$$

$$\text{cuando } n = 40, \text{ valor en tablas, } \frac{-2,208039}{0,044160}$$

$$2,25 \quad (\text{restamos del menor})$$

$$\frac{-2,208039}{0,041960}$$

$$\text{diferencia: } 0,041960$$

Se aplica la regla de tres:

$$1 \text{ periodo} \quad \text{-----} \quad 0,044160$$

$$X \quad \text{-----} \quad 0,041960$$

$$X = 0,950170$$

Luego se suma a $n = 40$

$$12 \text{ } n = (40 + 0,950170) = 40,950170 \text{ (meses)}$$

$$n = \frac{40,950170}{12} = 3,412514 \text{ (años)}$$

$$1 \quad 360$$

$$0,412514 \text{ } X$$

$$X = 148,51 \text{ días}$$

$$\text{Tiempo } 3 \text{ años, 4 meses y } 28,5 \text{ días.}$$

EL VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO, O CÁLCULO DEL CAPITAL

El valor actual a interés compuesto es el valor de un documento, bien o deuda, antes de la fecha de su vencimiento, considerando determinada tasa de interés.

Por ejemplo, las preguntas ¿cuánto vale hoy una deuda de S/. 1.000.000 que vencerá en 5 años? y ¿en cuánto se puede vender un documento de S/. 5.000.000 que vence en 4 años? y otras similares se pueden responder mediante el cálculo del valor actual.

*"La expresión valor actual significa el valor de un pago futuro en una fecha determinada antes del vencimiento"*⁸.

*"Valor actual, valor en el momento presente de los beneficios o de los costos del futuro, actualizados al costo de oportunidad o de sustitución del capital"*⁹.

8. Justin H, Moore. *Op. cit.*, p. 124.

9. Nelson Dávalos A. *Op. cit.*, p. 519.

Para el efecto, se considera la fórmula del monto a interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^n, \text{ de donde se despeja } C.$$

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$C = M(1 + i)^{-n} \text{ fórmula del valor actual a interés compuesto (5.6)}$$

También se conoce que $M = C(1 + j)^{m \cdot t}$. Entonces:

$$C = M(1 + j/m)^{-m \cdot t} \text{ fórmula del valor actual a interés compuesto (5.7)}$$

Para capitalizaciones continuas:

$$C = Me^{-j \cdot t}$$

$$(e = 2,718281)$$

Gráficamente, se puede ubicar el valor actual:



El valor actual puede calcularse en cualquier fecha comprendida entre la fecha de suscripción y la fecha de vencimiento; dependiendo de las condiciones en que se establezca el cálculo. Puede haber dos casos generales: *cuando el documento no gana interés y el valor nominal coincide con el monto, o cuando el documento gana interés y se requiere calcular el monto.*

EJEMPLO 5.23

Calcular el valor actual de un pagaré cuyo valor al vencimiento, al final de 4 años, es S/. 3.500.000, considerando una tasa de interés de 12% anual capitalizable semestralmente. (Éste es un ejemplo típico del primer caso).

$$M = \text{S/. } 3.500.000; j = 0,12; t = 4; m = 2$$

$$C = M(1 + j/m)^{-m \cdot t}$$

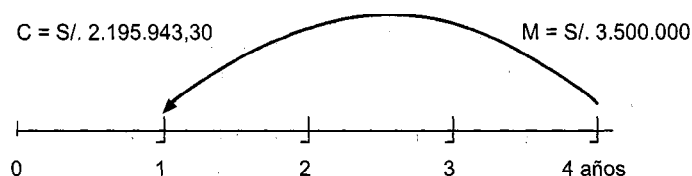
$$C = 3.500.000(1 + 0,12/2)^{-2(4)}$$

$$C = 3.500.000(1,06)^{-8}$$

$$C = 3.500.000(0,627412)$$

$$C = \text{S/. } 2.195.943,30$$

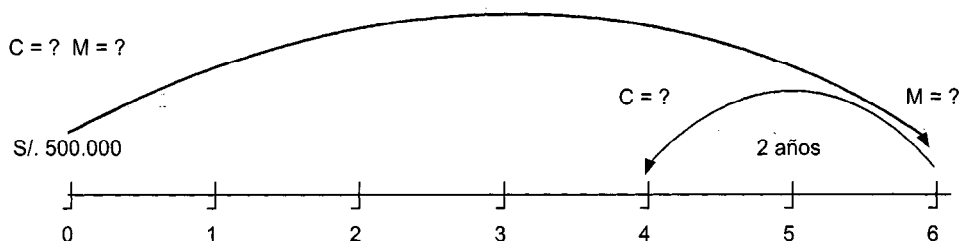
Entonces, el valor actual es 2.195.943,30.



EJEMPLO 5.24

Calcular el valor actual de un documento cuyo valor nominal es S/. 500.000 a 6 años de plazo con 12% de interés anual capitalizable semestralmente desde su suscripción, si se vende dos años antes de la fecha de vencimiento, considerando una tasa de 14% anual capitalizable semestralmente. (Éste es un ejemplo típico del segundo caso).

Se elabora un gráfico de tiempos y valores.



Se calcula el monto a los 6 años:

$$M = C \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m \cdot t}$$

$$M = 500.000 \left(1 + \frac{0,12}{2} \right)^{2(6)}$$

$$M = 500.000(1,06)^{12}$$

$$M = 500.000(2,012196)$$

$$M = \text{S/. } 1.006.098,236$$

Se calcula el valor actual 2 años antes del vencimiento.

$$C = M \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-m \cdot t}$$

$$C = 1.006.098,236 \left(1 + \frac{0,14}{2} \right)^{-2(2)}$$

$$C = 1.006.098,30 (1,07)^{-4}$$

$$C = 1.006.098,30 (0,762895) \quad C = \text{S/. } 767.547,53$$

Valor actual = S/. 767.547,53

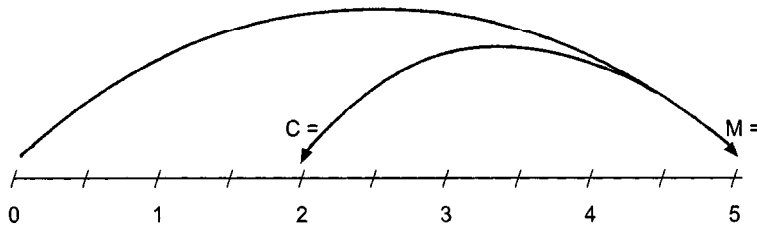
PRECIO DE UN DOCUMENTO

En el caso 2 pueden darse, a su vez, tres situaciones diferentes respecto a la compra-venta de un documento: *cuando se negocia a la par*, es decir, la tasa de negociación es la misma que la nominal y el precio se mantiene sin variaciones; *cuando se negocia con premio*, es decir, la tasa de negociación es menor que la nominal y el precio sube; *cuando se negocia con castigo*; es decir, la tasa de negociación es mayor que la nominal y el precio baja.

EJEMPLO 5.25

Después de 2 años de la fecha de suscripción se negocia un documento de S/. 3.000.000 con vencimiento en 5 años, con una tasa de interés de 21% anual capitalizable semestralmente, desde la suscripción. Calcular su valor actual o precio en las siguientes alternativas: **a)** con una tasa de 18% anual capitalizable trimestralmente; **b)** con una tasa de 21% anual capitalizable semestralmente; **c)** con una tasa de 24% efectiva.

Se traza el gráfico de tiempos y valores:



Se calcula el monto

$$M = 3.000.000(1 + 0,105)^{10} = \text{S/}. 8.142.242,54$$

Se halla el valor actual o precio de negociación:

- a)** Respecto a la primera alternativa, $i = 18\%$ anual capitalizando trimestralmente,
 $C = 8.142.242,54(1 + 0,045)^{-12}$
 $C = \text{S/}. 4.801.186,205$. Esta es una negociación con premio.
- b)** En relación con la segunda alternativa, $i = 21\%$ anual capitalizando semestralmente,
 $C = 8.142.242,54(1 + 0,105)^{-6}$
 $C = \text{S/}. 4.472.706,152$. Esta es una negociación a la par, pues la tasa de negociación es igual a la nominal; además, se puede comprobar calculando el monto desde la fecha de suscripción hasta la de negociación
 $M = 3.000.000(1 + 0,105)^4 = \text{S/}. 4.472.706,152$.
- c)** Respecto de la tercera alternativa, $i = 24\%$ efectiva,
 $C = 8.142.242,54(1 + 0,24)^{-3}$
 $C = \text{S/}. 4.270.502,49$. Esta es una negociación con castigo; es el precio más bajo de los tres.

VALOR ACTUAL CON TIEMPO FRACCIONARIO

El valor actual, al igual que el monto a interés compuesto, también puede calcularse con periodos de capitalización no enteros, es decir, fraccionarios.

Para el cálculo existen dos alternativas: *en forma matemática o exacta*, utilizando únicamente interés compuesto:

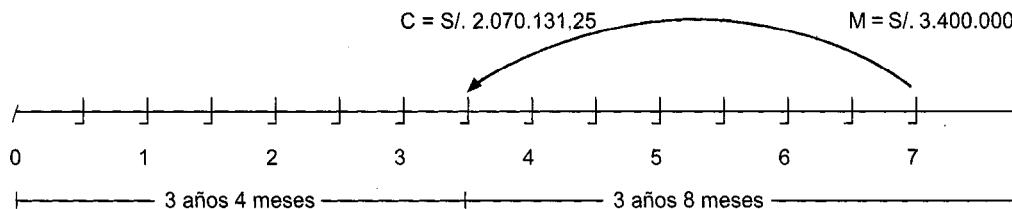
$$C = M (1 + i)^{-n}$$

En forma práctica o comercial, utilizando interés compuesto para la parte entera e interés simple para la parte fraccionaria:

$$C = M(1 + i)^{-n} (1 + it)^{-1*}$$

EJEMPLO 5.26

El valor de un documento al final de 7 años será S/. 3.400.000. Calcular su valor actual, luego de transcurridos 3 años y 4 meses de la fecha de suscripción, considerando una tasa de interés de 14% capitalizable semestralmente.



$$M = \text{S/. } 3.400.000$$

$$j/2 = 0,14/2 = 0,07$$

Por la forma matemática:

$$C = M (1 + j)^{-n}$$

$$n = \frac{(7)(12) - [(3)(12) + 4]}{6}$$

$$n = \frac{84 - 40}{6} = \frac{44}{6} = 7 + 2/6$$

O también:

$$n = \frac{(3)(12) + 8}{6} = \frac{44}{6} = 7,3333$$

$$C = 3.400.000 \left(1 + \frac{0,14}{2} \right)^{-n}$$

Se convierte el tiempo en meses y se divide entre el número de meses que tiene el periodo de capitalización.

$$C = 3.400.000 (1 + 0,07)^{-(7)2/6}$$

$$C = 3.400.000 (1,07)^{-7,33333}$$

* $\left(\text{Con interés simple } C = \frac{M}{1 + it} \right)$

$$C = 3.400.000 (0,608862)$$

$$C = S/. 2.070.131,25 \text{ (valor actual por la forma matemática)}$$

Por la forma práctica o comercial:

$$C = M (1 + i)^{-n} (1 + it)^{-1}$$

$$n = \frac{(3)(12) + 8}{6} = \frac{44}{6} = \frac{42}{6} + \frac{2}{6} = 7 + \frac{2}{6} \quad (7 \text{ la parte entera y } \frac{2}{6} \text{ la fraccionaria})$$

Entonces:

$$C = 3.400.000 \left[1 + \frac{0,14}{2} \right]^{-7} \left[1 + 0,14 \left(\frac{2}{12} \right) \right]^{-1}$$

En interés simple si se toma la tasa anual dividimos el número de meses entre 12.

$$C = 3.400.000 (1 + 0,07)^{-7} \left[1 + 0,07 \left(\frac{2}{6} \right) \right]^{-1}$$

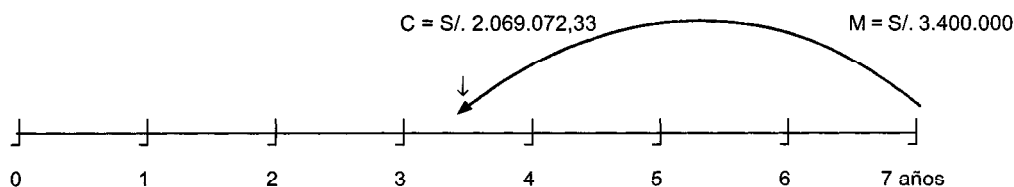
Si tomamos la tasa semestral, dividimos el tiempo entre 6.

$$C = 3.400.000 (0,622750) (1,023333)^{-1}$$

$$C = 3.400.000 (0,622750) (0,977199)$$

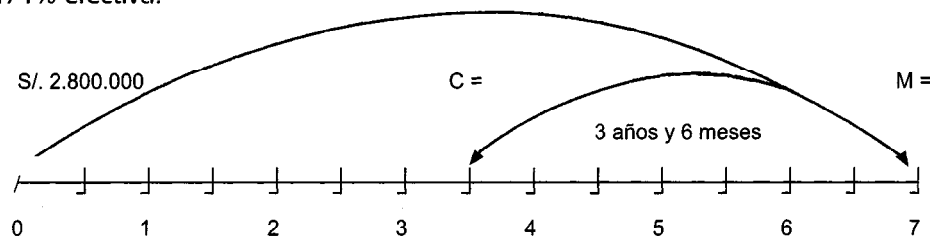
$$C = S/. 2.069.072,33$$

Al comparar los dos resultados, se observa que por el método práctico el valor actual es menor; es decir, el documento tendría un valor menor que por el método matemático.



EJEMPLO 5.27

Luego de 3 años y 3 meses de la fecha de suscripción se negocia un documento suscrito el día de hoy por S/. 2.800.000 a 6 años y 9 meses, con una tasa de interés de 12% capitalizable semestralmente. Calcular el valor actual a dicha fecha considerando una tasa de interés de 11 1/4% efectiva.



Se calcula el monto al final de los 6 años y 9 meses:

$$n = \frac{(6)(12 + 9)}{6} = \frac{81}{6} = 13 \frac{3}{6} = 13,5$$

$$M = 2.800.000 (1 + 0,12/2)^{13,5}$$

$$M = 2.800.000 (2,195984)$$

$$M_1 = S/. 6.148.755,335$$

Se calcula el monto por el método práctico o comercial:

$$M = 2.800.000 (1,06)^{13} [1 + (0,12)(3/12)]$$

$$M_2 = 2.800.000 (2,132928)(1,03)$$

$$M_2 = S/. 6.151.365,10$$

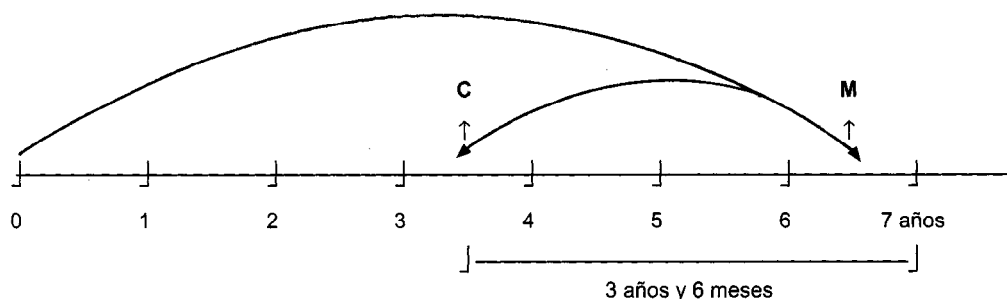
Con estos resultados se calcula el valor actual a los 3 años y 3 meses, si la tasa de interés es 11,25% efectiva.

El tiempo que falta para el vencimiento del documento es:

$$n = \frac{[6(12) + 9] - [3(12) + 3]}{12} = 3,5 \text{ (años)}$$

$$M_1 = S/. 6.148.755,335$$

$$M_2 = S/. 6.151.365,10$$



Se calcula el valor actual por el método matemático:

$$C_1 = 6.148.755,335 (1 + 0,1125)^{-3,5}$$

$$C_1 = 6.148.755,335 (0,688573)$$

$$C_1 = S/. 4.233.866,90$$

Ahora, por el método práctico o comercial:

$$C_2 = 6.151.365,20 (1 + 0,1125)^{-3} [1 + (0,1125)(6/12)]^{-1}$$

$$C_2 = 6.151.365,20 (1,1125)^{-3} (1,05625)^{-1}$$

$$C_2 = 6.151.365,20 (0,726273) (0,946746)$$

$$C_2 = S/. 4.229.654,46$$

Del análisis de los dos resultados:

$$C_1 = S/. 4.233.866,34 \text{ (matemático)}$$

$$C_2 = S/. 4.229.654,46 \text{ (comercial)}$$

Se puede concluir que el valor actual hallado mediante el método práctico es menor que el valor actual hallado mediante el método matemático.

DESCUENTO COMPUESTO

El descuento compuesto, al igual que el descuento simple, es la diferencia entre el monto y el valor actual de un documento, deuda, etc.

El descuento compuesto puede calcularse de dos maneras: el *descuento compuesto matemático*, que es el más utilizado; su fórmula se basa en el descuento simple:

$$\begin{aligned} D_c &= M - C \\ D_c &= M - M(1 + i)^{-n} \\ D_c &= M[1 - (1 + i)^{-n}] \\ D_c &= M[1 - v] \\ v &= (1 + i)^{-n} \end{aligned} \quad (5.8)$$

O el *descuento compuesto bancario*, que se calcula sobre el monto de la deuda; es decir, el monto menos el valor efectivo a interés compuesto. El valor efectivo a interés compuesto se expresa como C_{bc} . Se toma como base de deducción de la fórmula el valor efectivo a interés simple.

$$C_b = M(1 - dt)$$

Para interés compuesto, se tiene:

$$C_{bc} = M(1 - d)^n$$

Luego

$$\begin{aligned} D_{bc} &= M - M[(1 - d)^n] \\ D_{bc} &= M[1 - (1 - d)^n] \end{aligned} \quad (5.9)$$

EJEMPLO 5.28

Calcular el descuento compuesto de un documento cuyo monto será S/. 9.000.000, luego de 10 años, si se descontó 3 años antes de su vencimiento a una tasa de interés de 15% efectiva.

$$D_c = M - C$$

Descuento compuesto matemático:

$$\begin{aligned} D_c &= M - M(1 + i)^{-n} \\ M &= 9.000.000; i = 15\%; n = 3; D_c = M[1 - (1 + i)^{-n}] \\ D_c &= 9.000.000 - 9.000.000(1 + 0,15)^{-3} \\ D_c &= 9.000.000[1 - (1,15)^{-3}] \\ D_c &= 9.000.000(1 - 0,657516) \\ D_c &= 9.000.000(0,342484) \\ D_c &= S/. 3.082.353,91 \end{aligned}$$

Descuento compuesto bancario:

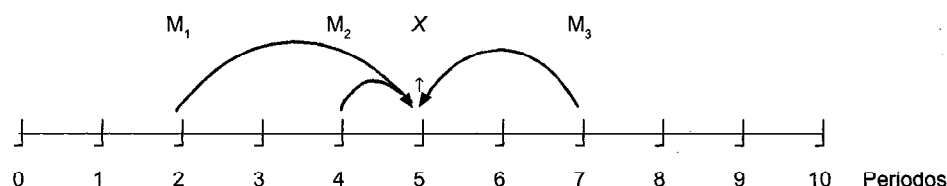
$$\begin{aligned} M &= 9.000.000; d = 15\%; n = 3; D_{bc} = M[1 - (1 - d)^n] \\ D_{bc} &= 9.000.000[1 - (1 - 0,15)^3] \\ D_{bc} &= 9.000.000[1 - 0,614125] \\ D_{bc} &= S/. 3.472.875 \end{aligned}$$

Como se puede notar, el descuento bancario compuesto es mayor, con una diferencia notable; por esto, casi no se utiliza.

ECUACIONES DE VALOR EN INTERÉS COMPUESTO

Al igual que en interés simple, en interés compuesto también se utilizan las ecuaciones de valor cuando se requiere remplazar un conjunto de obligaciones por otro conjunto de diferentes valores o capitales disponibles en diferentes tiempos, tomando en consideración una fecha común, llamada también fecha focal.

Relacionando los valores y fechas con la fecha focal, se obtiene la *ecuación de valor*, que permite igualar el conjunto de obligaciones iniciales con el conjunto de nuevas obligaciones. La siguiente gráfica nos ayuda a explicar el procedimiento:



Sean M_1 , M_2 y M_3 las obligaciones que vencen en los periodos dos, cuatro y siete, respectivamente, y se quiere remplazarlas por un solo valor al final del quinto periodo, con una tasa de interés (i) y una capitalización por periodo.

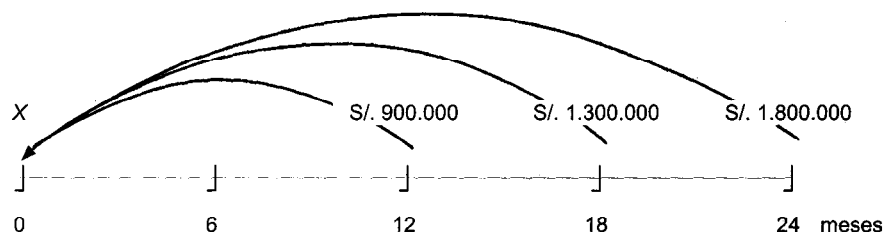
Sea X el valor que remplaza las tres obligaciones; y el final del quinto periodo la fecha focal. Al relacionar ésta con las obligaciones, se puede plantear la ecuación de valor, así:

$$X = M_1 (1 + i)^3 + M_2 (1 + i)^1 + M_3 (1 + i)^{-2}$$

El primer valor (M_1) acumulará interés durante 3 periodos; el segundo valor (M_2) acumulará interés durante 1 periodo y el tercer valor (M_3) deberá calcularse como valor actual por -2 periodos.

EJEMPLO 5.29

Una empresa tiene las siguientes obligaciones: S/. 900.000 a 12 meses de plazo; S/. 1.300.000 a 18 meses de plazo y S/. 1.800.000 a 24 meses de plazo; si ésta desea remplazar sus deudas con un solo pago el día de hoy, ¿cuál será el valor de ese pago, considerando una tasa de interés de 15% capitalizable semestralmente?



Para resolver el problema se toma como fecha focal el día de hoy, por ser la fecha en que pagará las deudas, y se asigna la letra X al valor de remplazo. Todos los valores por calcular serán valores actuales:

$$X = 900.000 \left(1 + \frac{0,15}{2} \right)^{-2} + 1.300.000 \left(1 + \frac{0,15}{2} \right)^{-3} \\ + 1.800.000 \left(1 + \frac{0,15}{2} \right)^{-4}$$

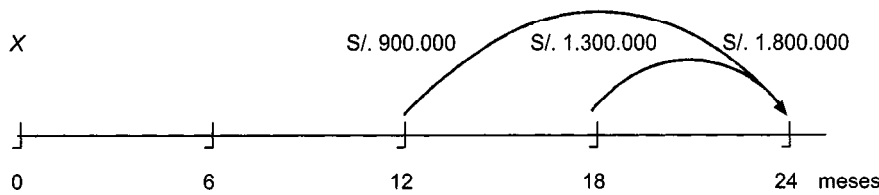
$$X = 900.000 (1,075)^{-2} + 1.300.000 (1,075)^{-3} + 1.800.000 (1,075)^{-4}$$

$$X = 900.000 (0,865333) + 1.300.000 (0,804961) + 1.800.000 (0,748801)$$

$$X = 778.799,70 + 1.046.449,30 + 1.347.841,80$$

$$X = S/. 3.173.090,80$$

Si en el mismo problema la empresa consigue que sus acreedores le acepten consolidar sus tres deudas para cancelarlas al final de 24 meses, ¿cuál será el valor de este pago?



Se toman 24 meses como fecha focal por ser la fecha de pago; los dos primeros valores serán montos por cuanto ganarán intereses por 2 y 1 periodos, y el último no se altera:

$$X = 900.000 (1 + 0,075)^2 + 1.300.000 (1 + 0,075)^1 + 1.800.000$$

$$X = 900.000 (1,155625) + 1.300.000 (1,075) + 1.800.000$$

$$X = 1.040.062,50 + 1.397.500 + 1.800.000$$

$$X = S/. 4.237.562,50$$

Como puede observarse, el resultado es mayor que el del primer problema puesto que se realiza el pago al final; en consecuencia, tiene que pagar más intereses.

COMPARACIÓN DE OFERTAS

En cualquier empresa o negocio, es frecuente tener que seleccionar, la mejor oferta, en condiciones similares, tanto para comprar como para vender uno o más bienes o servicios. En este punto se estudiará cómo las ecuaciones de valor ayudan a seleccionar la oferta más alta para el vendedor o la más baja para el comprador, a largo plazo, tomando como fecha focal el tiempo cero.

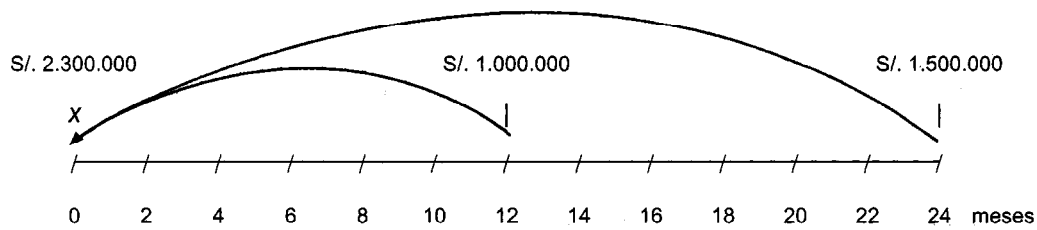
EJEMPLO 5.30

Una persona desea vender una propiedad y recibe tres ofertas: S/. 4.000.000 de contado; S/. 2.300.000 de contado, S/. 1.000.000 a un año y S/. 1.500.000 a 2 años de plazo; S/. 1.000.000 de contado, una letra de S/. 2.000.000 a 18 meses y otra letra de S/. 2.500.000

a 36 meses plazo. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar, considerando que el rendimiento del dinero es 24% anual capitalizable trimestralmente?

Primera oferta: S/. 4.000.000 hoy

Segunda oferta:



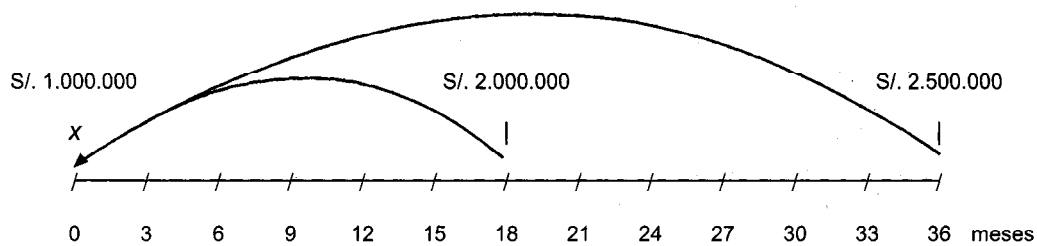
Se relacionan los pagos de S/. 1.000.000 y S/. 1.500.000 con su respectivo valor actual, en el tiempo cero:

$$X = 2.300.000 + 1.000.000 \left(1 + \frac{0,24}{4} \right)^{-4} + 1.500.000 \left(1 + \frac{0,24}{4} \right)^{-8}$$

$$X = 2.300.000 + 792.093,66 + 941.118,56$$

$$X = \text{S/. } 4.033.212,22 \text{ (segunda oferta)}$$

Tercera oferta:



Se relacionan los dos pagos futuros con la fecha focal del día de hoy.

$$X = 1.000.000 + 2.000.000(1 + 0,06)^{-4,5} + 2.500.000(1,06)^{-7,5}$$

$$X = 1.000.000 + 1.538.698,75 + 1.614.901,43$$

$$X = \text{S/. } 4.153.600,18 \text{ (tercera oferta)}$$

La más conveniente para el vendedor es la tercera oferta y para el comprador la primera.

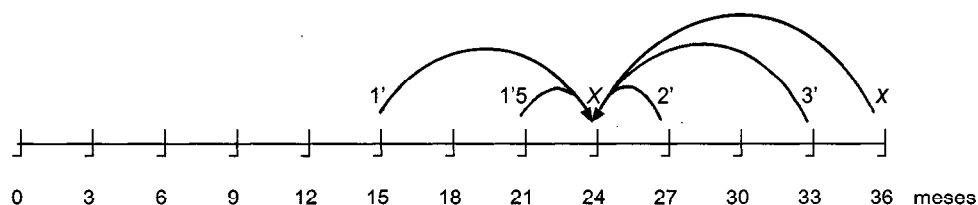
REEMPLAZO DE LAS OBLIGACIONES POR DOS PAGOS IGUALES

Cuando se quiere reemplazar las obligaciones por dos pagos iguales, se debe escoger la fecha de pago de cualquiera de los dos pagos como fecha focal.

EJEMPLO 5.31

Una empresa tiene las siguientes deudas: S/. 1.000.000 a 15 meses de plazo; S/. 1.500.000 a 21 meses de plazo; S/. 2.000.000 a 27 meses de plazo, con una tasa de interés de 12% efectiva desde la suscripción; S/. 3.000.000 a 33 meses de plazo; la empresa desea reemplazar todas sus deudas por 2 pagos iguales a 24 y 36 meses, a una tasa de interés de 36% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor de dichos pagos.

Se plantea el problema gráficamente, tomando como fecha focal 24 meses:



$$n_x = \frac{24 - 36}{3} = -\frac{12}{3} = -4$$

$$n_1 = \frac{24 - 15}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$n_2 = \frac{24 - 21}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$n_3 = \frac{24 - 27}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$n_4 = \frac{24 - 33}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

Se calcula el monto de la tercera opción:

$$M = 2.000.000 (1 + 0,12)^{2,25}$$

$$M = 2.580.896,25$$

Se plantea la ecuación de valor:

$$X + X \left(1 + \frac{0,36}{4} \right)^{-4} = 1.000.000(1 + 0,09)^3 + 1.500.000(1 + 0,12)^1$$

$$+ 2.580.896,25 (1,12)^{-1} + 3.000.000 (1,12)^{-3}$$

$$X + X (1,09)^{-4} = 1.295.029 + 1.680.000 + 2.304.371,65 + 2.135.340,74$$

$$X + X (0,708425) = 7.414.741,39$$

$$(1,708425) X = 7.414.741,39$$

$$X = \frac{7.414.741,39}{1,708425} \quad X = \text{S/. } 4.340.103,54$$

Por tanto, se deben efectuar dos pagos iguales de S/. 4.340.103,54

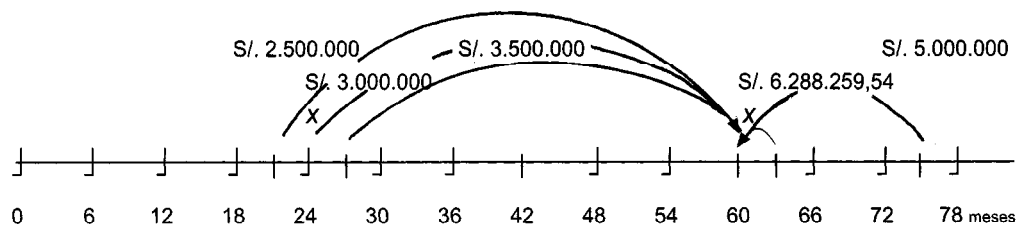
EJEMPLO 5.32

Una empresa tiene las siguientes deudas: S/. 2.500.000 a 21 meses de plazo; S/. 3.000.000 a 27 meses de plazo; S/. 3.500.000 a 42 meses de plazo; S/. 4.000.000 a 63 meses plazo, con una tasa de interés de 9% efectiva; S/. 5.000.000 a 75 meses de plazo; la empresa desea reemplazar sus deudas por dos pagos iguales a los 24 y 60 meses. Calcular el valor de dichos pagos, considerando una tasa de interés de 36% anual, capitalizable semestralmente.

Primero se calcula el monto de la cuarta deuda:

$$M = 4.000.000 (1,09)^{5,25} = \text{S/. } 6.288.529,54$$

Se toman 60 meses como fecha focal:



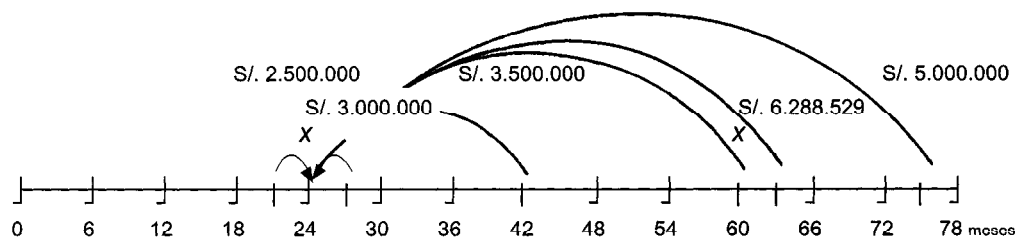
$$n_x = \frac{60 - 24}{6} = 6; n_1 = \frac{60 - 21}{6} = 6,5; n_2 = \frac{60 - 27}{6} = 5,5;$$

$$n_3 = \frac{60 - 42}{6} = 3; n_4 = \frac{60 - 63}{6} = -0,5; n_5 = \frac{60 - 75}{6} = -2,5$$

$$\begin{aligned} X(1,18)^6 + X &= 2.500.000(1,18)^{6,5} + 3.000.000(1,18)^{5,5} \\ &+ 3.500.000(1,18)^3 + 6.288.529,54(1,18)^{-0,5} + 5.000.000(1,18)^{-2,5} \\ X(2,699554) + X &= 7.331.166,047 + 7.455.423,1 \\ &+ 5.750.612 + 5.789.060,68 + 3.305.711,785 \\ 3,699554(X) &= 29.631.973,61 \end{aligned}$$

$$X = \text{S/. } 8.009.606,7 \text{ (dos pagos iguales)}$$

Ahora se toman 24 meses como fecha focal.



$$n_x = \frac{24 - 60}{6} = -6; n_1 = \frac{24 - 21}{6} = 0,5; n_2 = \frac{24 - 27}{6} = -0,5;$$

$$n_3 = \frac{24 - 42}{6} = -3; n_4 = \frac{24 - 63}{6} = -6,5; n_5 = \frac{24 - 75}{6} = -8,5$$

$$\begin{aligned} X + X(1,18)^{-6} &= 2.500.000(1,18)^{0,5} + 3.000.000(1,18)^{-0,5} \\ &+ 3.500.000(1,18)^{-3} + 6.288.529,54(1,18)^{-6,5} + 5.000.000(1,18)^{-8,5} \\ X + 0,370431(X) &= 2.715.695,123 + 2.761.723,854 \\ &+ 2.130.208,054 + 2.144.450,65 + 1.224.539,904 \\ 1,370431(X) &= 10.976.617,585 \\ X &= \text{S/. } 8.009.606,7 \text{ (dos pagos iguales)} \end{aligned}$$

Por tanto, deben hacerse dos pagos iguales de S/. 8.009.606,7

Estos procedimientos permiten concluir que, tomando cualquiera de las dos fechas focales, el resultado es igual.

TIEMPO EQUIVALENTE

El tiempo equivalente es el tiempo de vencimiento promedio de dos o más deudas, valores u obligaciones.

"La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento en fechas diferentes, puede liquidarse mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como fecha de vencimiento promedio de las deudas. El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como tiempo equivalente"¹⁰.

La regla más frecuente y común para el cálculo del tiempo equivalente o tiempo de vencimiento promedio de dos o más deudas está regida por la siguiente fórmula:

$$T. E. = \frac{M_1 t_1 + M_2 t_2 + M_3 t_3 + M_4 t_4 \dots}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots} \quad (5.10)$$

Es decir, es igual a la suma de los diferentes montos multiplicados por sus tiempos de vencimiento, divididas por la suma de los respectivos montos, por cuanto lo que se calcula es un tiempo de vencimiento promedio. A continuación se presenta un ejemplo cuando se tiene una tasa efectiva.

EJEMPLO 5.33

Encontrar el tiempo equivalente, o tiempo de vencimiento promedio, de las siguientes obligaciones: S/. 1.000.000 a 1 año de plazo; S/. 2.000.000 a 2 años y 6 meses de plazo; S/. 3.000.000 a 2 años y 9 meses de plazo.

$$T.E. = \frac{1.000.000(1) + 2.000.000(2,5) + 3.000.000(2,75)}{1.000.000 + 2.000.000 + 3.000.000}$$

10. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, p. 75.

$$T.E. = \frac{1.000.000 + 5.000.000 + 8.250.000}{6.000.000} = \frac{14.250.000}{6.000.000}$$

$$T.E. = 2,375 \text{ años}$$

$$1 \text{ año} \quad \text{-----} \quad 360 \text{ días}$$

$$0,375 \text{ años} \quad \text{-----} \quad X$$

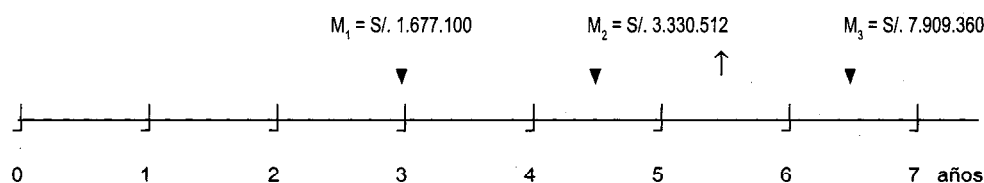
$$X = 135 \text{ días}$$

$$T.E. = 2 \text{ años, 4 meses y 15 días}$$

En el ejemplo siguiente la tasa de interés es anual capitalizable semestralmente.

EJEMPLO 5.34

Una empresa tiene las siguientes deudas: S/. 1.000.000 a 3 años de plazo, con una tasa de 18% capitalizable semestralmente; S/. 2.000.000 a 4 años y 6 meses con una tasa de 12% efectiva; S/. 3.000.000 a 6 años y 7 meses con una tasa de 15% capitalizable trimestralmente, desde su suscripción; la empresa desea reemplazar sus deudas por un solo pago, con un tiempo equivalente para los tres vencimientos. Calcular la fecha de pago y el valor del pago único, considerando una tasa de interés de 28% anual capitalizable semestralmente.



$$M = 1.000.000 \left(1 + \frac{0,18}{2} \right)^6 = \text{S/. } 1.677.100,11$$

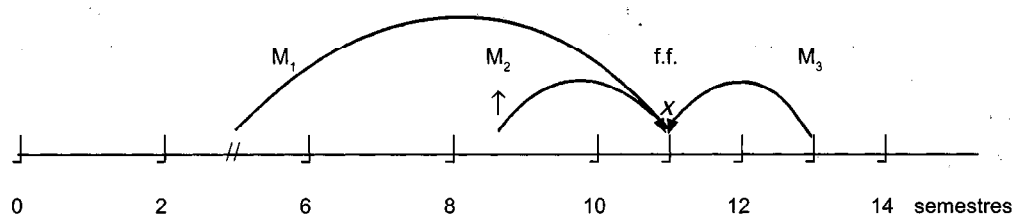
$$M = 2.000.000 (1 + 0,12)^{4,5} = \text{S/. } 3.330.512,73$$

$$M = 3.000.000 \left(1 + \frac{0,15}{4} \right)^{26,33333} = \text{S/. } 7.909.360,36$$

$$T.E. = \frac{1.677.100,11(6) + 3.330.512,73(9) + 7.909.360,36(13,17)}{1.677.100,11 + 3.330.512,73 + 7.909.360,36}$$

$$T.E. = \frac{10.062.600,66 + 29.974.614,57 + 104.166.275,9}{12.916.973,20}$$

$$T.E. = \frac{144.203.491,1}{12.916.973,20} = 11,16 \text{ semestres}$$



Cálculo de tiempos con referencia a la fecha focal:

$$11,16 - 6 = 5,16$$

$$11,16 - 9 = 2,16$$

$$11,16 - 13,16 = -2$$

Entonces, se puede plantear la ecuación de valor:

$$X = 1.677.100,11(1 + 0,14)^{5,16} + 3.330.512,73(1 + 0,14)^{2,16} + 7.909.360,36(1,14)^{-2}$$

$$X = 3.297.524,42 + 4.420.033,66 + 6.085.995,97$$

$$X = S/. 13.803.554,05$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el monto a interés compuesto y a interés simple de un capital de S/. 1.000.000 colocado durante 10 años a una tasa de interés de 12% anual. Analizar los resultados.

Respuestas

Monto a interés compuesto = S/. 3.105.848,20

Monto a interés simple = S/. 2.200.000.

2. Calcular el monto a interés compuesto y el interés compuesto de un capital de S/. 500.000 colocado a una tasa de interés de 15% anual capitalizable semestralmente durante 7 años.

Respuestas

Monto = S/. 1.376.222

Interés compuesto = S/. 876.222.

3. Una empresa obtiene un préstamo de S/. 4.000.000 a 10 años de plazo con una tasa de interés de 15% capitalizable semestralmente. Calcular el interés y el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento.

Respuestas

Monto = S/. 16.991.404,45

Interés = S/. 12.991.404,4



4. Una persona coloca un capital de S/. 3.000.000 en una cuenta de ahorros a 12% de interés capitalizable trimestralmente; ¿cuánto habrá en la cuenta al final de 8 años y 6 meses?

Respuesta

S/. 8.195.715,89

5. Rubén abre una cuenta de ahorros hoy, con S/. 800.000, a una tasa de interés de 14% capitalizable semestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta luego de 7 años y 7 meses?

Nota: Hacer los cálculos en forma matemática y comercial, y analizar los resultados.

Respuestas

Por la forma matemática: S/. 2.232.255,74

Por la forma comercial: S/. 2.232.976,19

6. Calcular, por los métodos matemático y comercial, el monto compuesto que acumulará un capital de S/. 1.500.000 durante 6 años y 9 meses a 16% anual capitalizable semestralmente. Analizar los resultados.

Respuestas

Por la forma matemática: S/. 4.239.473,82

Por la forma comercial: S/. 4.242.613,44

7. ¿A qué tasa efectiva equivale una tasa nominal de 15% capitalizable semestralmente?

Respuestas

$i = 0,155625$; $i = 15,5625\%$

8. Resolver el problema anterior buscando la tasa nominal capitalizable semestralmente, equivalente a una tasa efectiva de 15,5625%.

Respuesta

$j = 15\%$ anual capitalizable semestralmente

9. ¿A qué tasa efectiva equivale una tasa nominal de 18% anual capitalizable trimestralmente?

Respuesta

$j = 19,2519\%$

10. ¿A qué tasa anual, capitalizable trimestralmente, equivale una tasa efectiva de 19,2519%?

Respuesta

$i = 18\%$ anual capitalizable trimestralmente.



11. ¿A qué tasa anual capitalizable trimestralmente se debe colocar un capital de S/. 1.000.000 para que produzca un monto de S/. 5.500.000 en 6 años y 9 meses? ¿A qué tasa efectiva equivale?

Respuestas

$j = 26,07\%$ anual capitalizable trimestralmente

$i = 28,7311\%$

12. ¿A qué tasa efectiva se convertirá un capital de S/. 500.000 en un monto de S/. 900.000 en 9 años y 6 meses?

Respuesta

$i = 6,3826\%$

13. ¿En qué tiempo, en años, se duplicará un capital de S/. 700.000 a una tasa de interés efectiva de 18%?

Respuesta

4,187835 años

14. ¿En qué tiempo, en años, aumentará en $\frac{3}{4}$ partes más un capital de S/. 600.000, considerando una tasa de interés de $17 \frac{1}{8}\%$ capitalizable semestralmente?

Respuesta

3,405818 años

15. Calcular el valor actual de un pagaré cuyo valor al término de 3 años y 6 meses será S/. 2.100.000, considerando una tasa de interés de 16% anual capitalizable semestralmente (sin inflación).

Respuesta

$C = S/. 1.225.329,83$

16. Un documento suscrito el día de hoy por un valor de S/. 950.000, a 5 años de plazo con una tasa de interés de 17% anual capitalizable semestralmente; se vende 2 años antes de la fecha de su vencimiento, considerando una tasa de 16% anual capitalizable semestralmente; calcular el valor de la venta del documento en esa fecha (elaborar la gráfica correspondiente).

Respuesta

S/. 1.578.795,81

17. Una persona que desea vender una propiedad y recibe tres ofertas: S/. 2.000.000 de contado; S/. 1.000.000 de contado y S/. 1.200.000 a 1 año de plazo; S/. 100.000 al contado y dos letras de S/. 1.200.000 a 6 meses y 1 año, respectivamente. ¿Cuál de

las tres ofertas le conviene aceptar, considerando que el rendimiento del dinero es 21% capitalizable semestralmente?

Respuesta

La tercera

18. Un documento suscrito por S/. 3.500.000 a 5 años y 7 meses, con una tasa de 12% capitalizable trimestralmente, se vende luego de transcurridos 2 años y 5 meses desde la fecha de suscripción; considerando una tasa de interés de 13% capitalizable semestralmente, calcular el valor de la venta de dicho documento (hacer los cálculos en forma matemática y comercial).

Respuestas

S/. 4.545.188,20 y S/. 4.543.614,50

19. Calcular el descuento compuesto matemático y el descuento compuesto bancario de un documento cuyo monto al final de 7 años es S/. 7.000.000, si fue descontado 3 años antes de la fecha de su vencimiento con una tasa de interés de 14% efectiva.

Respuestas

Dc = S/. 2.275.199,40; Dbc = S/. 2.547.608

20. Una empresa tiene las siguientes deudas: S/. 1.000.000 a 3 años de plazo con una tasa de 18% capitalizable semestralmente; S/. 5.000.000 a 4 años y 6 meses con una tasa de 12% efectiva; S/. 3.000.000 a 6 años y 9 meses con una tasa de 15% anual capitalizable trimestralmente; la empresa desea remplazar sus deudas por un solo pago en un tiempo equivalente para los tres vencimientos. Calcular la fecha de pago y el valor de pago único, considerando una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente.

Respuestas

T.E. = 5,368206 años; pago único $X = \text{S/}. 18.398.403,52$

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcular el número de periodos de capitalización y la tasa de interés, por periodo de capitalización, de un capital colocado a una tasa de 24% anual capitalizable semestralmente durante 6 años y 9 meses.
2. Calcular el monto, a interés compuesto, de un capital de S/. 5.000.000 colocado a una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente durante 5 años y 6 meses.
3. En el problema anterior, calcular el interés compuesto.

4. Al nacer su hijo, una madre abre una cuenta de ahorros con un capital de S/. 900.000. ¿Cuánto tendrá en la cuenta cuando su hijo cumpla 18 años, si se considera una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente?
5. ¿A qué tasa efectiva es equivalente una tasa de 36% anual capitalizable trimestralmente?
6. ¿A qué tasa anual capitalizable trimestralmente es equivalente una tasa efectiva de 41,1582%?
7. Un inversionista tiene un capital de S/. 50.000.000 y desea invertirlo a 15 meses de plazo; al consultar en el mercado financiero le ofrecen las siguientes opciones: una tasa efectiva de 42%; una tasa de 39% anual capitalizable semestralmente; una tasa de 38% anual capitalizable trimestralmente; una tasa de 36% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál de las cuatro opciones le produce mayor interés? Demostrar analíticamente y prácticamente.
8. Un documento de S/. 10.000.000, suscrito el día de hoy a 5 años y 6 meses plazo, es negociado luego de transcurridos 2 años y 3 meses de la fecha de suscripción, con una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente, calcular su valor actual a la fecha de negociación.
9. Un documento de S/. 4.000.000, suscrito el día de hoy a 6 años y 9 meses de plazo, con una tasa de interés de 15% anual capitalizable semestralmente desde su suscripción, es negociado luego de transcurridos dos años y 6 meses de la fecha de suscripción con las siguientes alternativas: una tasa de interés de 18% efectiva; una tasa de 15% anual, capitalizable semestralmente; una tasa de 12% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor actual o precio a la fecha de negociación para cada alternativa e indicar si es con premio, a la par o con castigo.
10. Una empresa tiene las siguientes deudas u obligaciones: S/. 3.000.000 a 2 años de plazo; S/. 5.000.000 a 4 años de plazo; S/. 7.000.000 a 8 años de plazo; S/. 9.000.000 a 10 años de plazo. La empresa acuerda con sus acreedores remplazar sus deudas por un solo pago a los 5 años, con una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente; calcular el valor del pago único.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

$$1. \quad m = 360/180 = 2$$

$$i = 0,24/2 = 0,12$$

$$n = \frac{6(12) + 9}{6} = 13,5$$

2. $m = 360/90 = 4$

$i = 0,18/4 = 0,045$

$$n = \frac{5(12) + 6}{3} = 22$$

$M = C(1 + i)^n$ (Fórmula 5.1)

$M = 5.000.000(1 + 0,045)^{22} = S/. 13.168.260,04$

3. $I = M - C$ (fórmula 5.2)

$I = 13.168.260,04 - 5.000.000 = S/. 8.168.260,04$

4. $i = 0,15/4 = 0,0375$

$n = (18)(12)/3 = 72$

$M = 900.000(1 + 0,0375)^{72} = S/. 12.746.357,56$

5. $m = 360/90 = 4$

$1 + i = (1 + 0,36/4)^4$ (Fórmula 5.4)

$1 + i = 1,411582$

$i = 0,411582$

$i = 41,1582\%$ efectiva

6. $1 + 0,411582 = (1 + j/4)^4$

Elevamos ambos miembros de la ecuación a la potencia 1/4

$(1,411582)^{1/4} = 1 + j/4$

$1,09 = 1 + j/4$

$(0,09)4 = j$

$0,36 = j$

$j = 36\%$ anual capitalizable trimestralmente.

7. *Analíticamente:*

Primera opción:

$i = 42\% \quad i = 0,42$

Segunda opción:

$1 + i = (1 + 0,39/2)^2$ (Fórmula 5.4)

$1 + i = 1,428025$

$i = 42,8025\%$

Tercera opción:

$1 + i = (1 + 0,38/4)^4$

$1 + i = 1,437661$

$i = 43,7661\%$



Cuarta opción:

$$1 + i = (1 + 0,36/12)^{12}$$

$$1 + i = 1,425761$$

$$i = 42,5761\%$$

En este caso, le conviene analíticamente la tercera opción $i = 43,7661\%$

Prácticamente:

Primera opción:

Tasa efectiva de 42%

$$M = 50.000.000(1 + 0,42)^{1,25}$$

$$M = S/. 77.505.127,46$$

$$I = 77.505.127,46 - 50.000.000 = S/. 27.505.127,46$$

Segunda opción:

Tasa de 39% anual capitalizable semestralmente:

$$M = 50.000.000(1 + 0,39/2)^{2,5}$$

$$M = S/. 78.053.030,11$$

$$I = 78.053.030,11 - 50.000.000 = S/. 28.053.030,11$$

Tercera opción

Tasa de 38% anual capitalizable trimestralmente:

$$M = 50.000.000(1 + 0,38/4)^5$$

$$M = S/. 78.711.937,05$$

$$I = 78.711.937,05 - 50.000.000 = S/. 28.711.937,05$$

Cuarta opción:

Tasa de 36% anual capitalizable mensualmente:

$$M = 50.000.000(1 + 0,36/12)^{15}$$

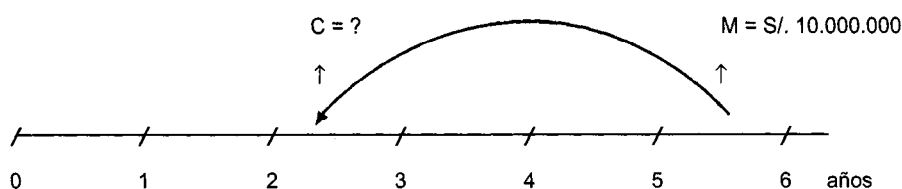
$$M = S/. 77.898.370,83$$

$$I = 77.898.370,83 - 50.000.000 = S/. 27.898.370,83$$

En este caso, le conviene la tercera opción $M = S/. 78.711.937,05$;

$$I = S/. 28.711.937,05$$

8. Se expresa gráficamente el problema:



$$n = \frac{[(5)(12) + 6] - [(2)12 + 3]}{3} = 13$$

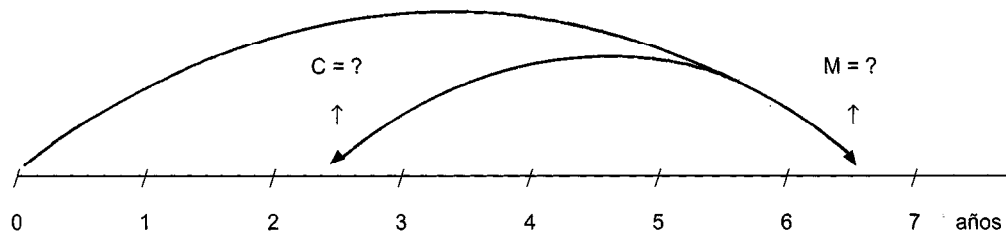
$$C = 10.000.000(1 + 0,18/4)^{-13}$$

$$C = 5.642.716,41$$

Respuesta

$C = 5.642.716,41$, es decir, éste es el valor actual o precio del documento a esa fecha.

9. Se expresa el problema gráficamente:



Negociación con una tasa de 18% efectiva:

$$M = 4.000.000(1 + 0,15/2)^{13,5}$$

$$M = S/. 10.618.771,09$$

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{12} = 4,25$$

$$C = 10.618.771,09(1 + 0,18)^{-4,25}$$

$$C = S/. 5.255.036,39 \text{ (negociación con castigo)}$$

Negociación con una tasa de 15% anual capitalizable semestralmente:

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{6} = 8,5$$

$$C = 10.618.771,09(1 + 0,15/2)^{-8,5}$$

$$C = S/. 5.742.517,31 \text{ (negociación a la par)}$$

Comprobemos:

$$M = 4.000.000(1 + 0,15/2)^5 = S/. 5.742.517,31$$

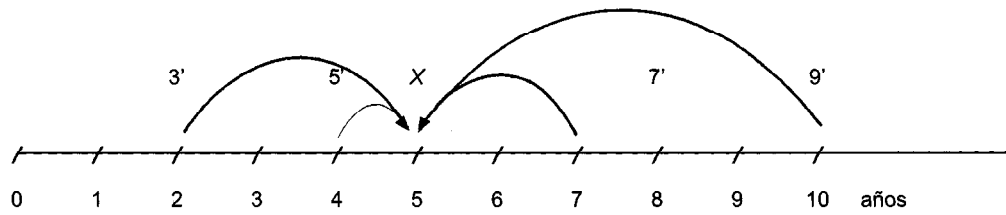
Negociación con una tasa de 12% anual capitalizable trimestralmente:

$$n = \frac{[(6)(12) + 9] - [(2)(12) + 6]}{3} = 17$$

$$C = 10.618.771,09(1 + 0,12/4)^{-17}$$

$$C = S/. 6.424.531,14 \text{ (negociación con premio)}$$

10. Se expresa el problema gráficamente:



$$n_1 = \frac{(5)(12) - (2)(12)}{6} = 6$$

$$n_2 = \frac{(5)(12) - (4)(12)}{6} = 2$$

$$n_3 = \frac{(5)(12) - (8)(12)}{6} = -6$$

$$n_4 = \frac{(5)(12) - (10)(12)}{6} = -10$$

$$X = 3.000.000(1 + 0.14/2)^6 + 5.000.000(1 + 0.07)^2 \\ + 7.000.000(1 + 0.07)^{-6} + 9.000.000(1 + 0.07)^{-10} \\ X = 19.466.230,25$$

Respuesta

Una solo pago de S/. 19.466.230,25

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Cuál es la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto?
2. ¿Cuál es la fórmula del monto en interés compuesto?
3. ¿Cómo se calcula el interés compuesto?
4. ¿En qué se diferencia una tasa de interés efectiva de una tasa de interés nominal capitalizable varias veces en el año?
5. ¿Qué es más conveniente para un inversionista: una tasa de interés de 45% efectiva o una tasa de 39% anual capitalizable mensualmente?

6. ¿Cuál es la fórmula del valor actual en interés compuesto?
7. ¿En qué se diferencia una tasa de interés anticipada de una tasa de interés vencida?
¿Cuál produce mayor interés compuesto?
8. ¿Cómo se calcula el precio de un documento con interés compuesto?
9. ¿Con qué procedimiento de cálculo se puede remplazar un conjunto de obligaciones o deudas a largo plazo por uno o más pagos?
10. ¿Cómo se calcula el descuento compuesto? ¿Con qué fórmula?

Capítulo 6

ANUALIDADES O RENTAS

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Anualidades o rentas

Clasificación de las anualidades o rentas

Anualidades vencidas

Monto de una anualidad

Valor actual de una anualidad

Cálculo de la renta o pago periódico

Cálculo del número de periodos de pago

Cálculo de la tasa de interés (i)

Anualidades anticipadas

Gradientes

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso



JUSTIFICACIÓN







Las anualidades o rentas son utilizadas con mucha frecuencia en operaciones financieras de endeudamiento y de formación de capitales, mediante cuotas periódicas o series de pagos o depósitos; es decir, sirven para formar capitales o para reducir deudas mediante cuotas periódicas. Las anualidades son muy útiles para la elaboración de tablas de amortización gradual, tablas de valor futuro, para el cálculo de cuotas periódicas, ya sea para cancelar una deuda o formar un capital.

Las anualidades o rentas se emplean en los cálculos de pólizas de seguros, cuotas de pago, cuotas de depósito, cálculo actuarial, compras a plazo, préstamos a largo plazo, préstamos hipotecarios y otros; por tanto, es muy necesario analizarlas en el área financiera. Para estudiarlas y manejarlas adecuadamente, el lector o estudiante debe dominar el interés simple y el interés compuesto.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo general del estudio de las anualidades o rentas consiste en conocer y manejar los mecanismos de cálculo que faciliten al lector la forma de acumular capitales o de amortizar endeudamientos mediante cuotas periódicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Conocer el concepto, nomenclatura y clasificación de las anualidades o rentas.
-  Calcular el monto y el valor actual de una anualidad.
-  Calcular la renta en función del monto o del valor actual.
-  Conocer las formas de cálculo de las variables: renta, periodos y tasas.
-  Conocer la aplicación de las anualidades o rentas en la realidad financiera con casos prácticos.
-  Conocer las gradientes y su aplicación.

CONDUCTA DE ENTRADA

1. Una serie de números que tienen una diferencia o razón común se denomina progresión.

Verdadero _____ Falso _____

2. ¿Cuáles son las progresiones más utilizadas?

3. La serie 3;5;7;9;... es una progresión aritmética.

Verdadero _____ Falso _____

4. La serie 80;75;70;65; tiene como diferencia común 5.

Verdadero _____ Falso _____

5. La serie 200;100;50;25;... es una progresión geométrica.

Verdadero _____ Falso _____

6. La serie 4;8;16;32;... es una progresión geométrica que tiene como razón común 2.

Verdadero _____ Falso _____

7. La fórmula para hallar la suma de una progresión geométrica cuya razón es mayor que 1 es:

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

Verdadero _____ Falso _____

8. La fórmula para hallar la suma de una progresión geométrica cuya razón es menor que 1 es:

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Verdadero _____ Falso _____

9. Una serie de depósitos iguales de dinero, que ganen intereses durante un determinado tiempo, pueden constituirse en un monto.

Verdadero _____ Falso _____

10. El valor actual de una serie de pagos iguales de dinero con sus respectivos intereses a un determinado plazo puede significar el valor original de una deuda.

Verdadero _____ Falso _____

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

- | | | | |
|--------------|------------------------------|--------------|--------------|
| 1. Verdadero | 2. Aritméticas y geométricas | 3. Verdadero | 4. Falso |
| 5. Verdadero | 6. Verdadero | 7. Verdadero | 8. Verdadero |
| 9. Verdadero | 10. Verdadero | | |

ANUALIDADES O RENTAS

Se comenzará por citar dos definiciones:

"Una anualidad es una serie de pagos periódicos iguales"¹. Puede ser pago o depósito de una suma de dinero a la cual se le reconoce una tasa de interés por periodo.

"Renta": el valor de cada pago periódico recibe el nombre de renta, o simplemente anualidad².

Es decir, que a la renta o anualidad se le asocia con los pagos o depósitos periódicos de sumas de dinero, como los dividendos de acciones, cupones de bonos, cuotas, pensiones, cuotas de amortización, cuotas de depreciación, etc.

Las anualidades o rentas constituyen una sucesión o serie de depósitos o pagos periódicos generalmente iguales, con sus respectivos intereses por periodo, y se las puede expresar gráficamente, como se observa en el ejemplo de 6 periodos y 6 pagos o depósitos (R).



CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES O RENTAS

Antes de esbozar una clasificación de las rentas, es necesario explicar algunos conceptos.

Periodo de pago o periodo de la anualidad

Es el tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos; puede ser diario, semanal, quincenal, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral, anual, etc.

Tiempo o plazo de una anualidad

Es el intervalo de tiempo que transcurre entre el comienzo, del primer periodo de pago y el final del último.

1. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 100.

2. J. H. Moore. *Op. cit.*, pp. 158-160.

Tasa de una anualidad

Es el tipo de interés que se fija para el pago de las rentas o anualidades; puede ser nominal o efectiva.

Renta

Es el valor del pago o depósito periódico.

Renta anual

Es la suma de los pagos o depósitos efectuados en un año.

Rentas perpetuas

Consisten en una serie de pagos que han de efectuarse indefinidamente.

J. H. Moore y Lincoyán Portus Govinden coinciden en clasificar anualidades o rentas de la siguiente forma:

Según el tiempo

Anualidades eventuales o contingentes. Aquellas en las que el comienzo y el fin de la serie de pagos son imprevistos y dependen de algún acontecimiento externo.

Ejemplo: los seguros de vida.

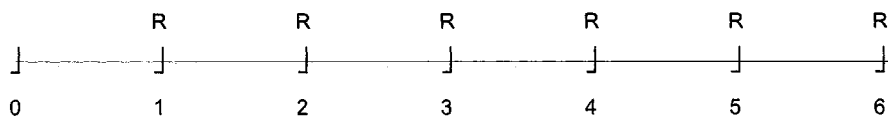
Anualidades ciertas. Aquellas en las que sus fechas inicial y terminal se conocen por estar establecidas en forma concreta.

Ejemplo: las cuotas de préstamos hipotecarios o quirografarios, pago de intereses de bonos, etc.

Según la forma de pago

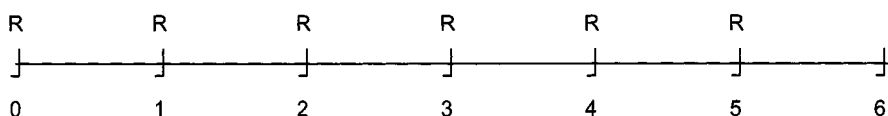
Anualidades ordinarias o vencidas. Son aquellas en las que el depósito, pago o renta y la liquidación de intereses se realiza al final de cada periodo.

Ejemplo: pago de cuotas mensuales por deudas a plazo.



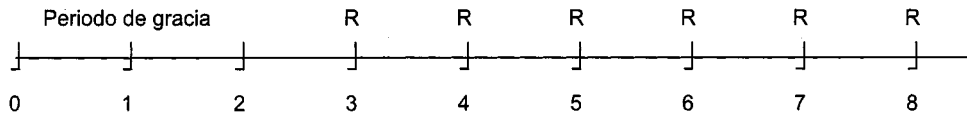
Anualidades anticipadas. Son aquellas en las que el depósito, el pago y la liquidación de los intereses se hace al principio de cada periodo.

Ejemplo: pago de cuotas por adelantado.



Anualidades diferidas. Son aquellas cuyo plazo comienza después de transcurrido determinado intervalo del tiempo establecido.

Ejemplo: préstamos con periodos de gracia.



Anualidades simples. Son aquellas cuyo periodo de pago coincide con el periodo de capitalización; si la capitalización es semestral, los pagos serán semestrales.

Anualidades generales. Son aquellas cuyos periodos de pago o de depósito y de capitalización no coinciden. Por ejemplo, cuando se hace una serie de depósitos trimestrales y la capitalización de los intereses es semestral.

Las anualidades ciertas y las eventuales pueden ser vencidas, o anticipadas; y éstas a su vez pueden ser diferidas, perpetuas y perpetuas diferidas.

Anualidades ciertas		Anualidades eventuales	
Vencidas	Anticipadas	Vencidas	Anticipadas
diferidas	diferidas	diferidas	diferidas
perpetuas	perpetuas	perpetuas	perpetuas
perpetuas diferidas	perpetuas diferidas	perpetuas diferidas	perpetuas diferidas

ANUALIDADES VENCIDAS

Del conjunto de anualidades anteriormente expresadas, se explicarán las más comunes, que son las anualidades ciertas vencidas simples; es decir, aquellas que vencen al final de cada periodo y cuyo periodo de pago coincide con el de capitalización.

*"El valor de una anualidad calculada a su terminación es el monto de ella. El valor de la anualidad calculado a su comienzo es su valor actual o presente"*³.

*"El monto de una anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos depósitos, cada uno acumulado hasta el término del plazo. El valor actual A de una anualidad es la suma de los valores actuales de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo"*⁴.

3. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 101.

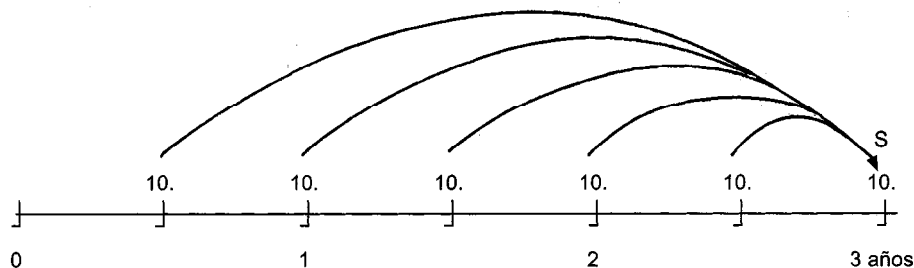
4. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, pp. 80-81.

En estas dos definiciones bastante completas, radica la base de la expresión práctica del monto y del valor presente o valor actual de una anualidad, así como la deducción de las respectivas fórmulas.

Para la deducción de la fórmula del monto de una anualidad, se toma como fecha focal el término de la anualidad; para la deducción de la fórmula del valor actual de una anualidad, se toma como fecha focal el tiempo cero o inicio de la anualidad.

MONTO DE UNA ANUALIDAD

Sea una anualidad o renta de S/. 10.000 al final de cada 6 meses durante 3 años, a 12% anual capitalizable semestralmente. (Anualidad vencida).



Para calcular el monto (S) de la anualidad, se toma como fecha focal el final del año 3. Entonces $n = 6$; $i = \frac{0,12}{2} = 0,06$

$$n = 6; i = \frac{0,12}{2} = 0,06$$

Cada renta ganará intereses durante los periodos que falten hasta el término de la anualidad, o hasta el último depósito o renta. Por tanto, se pueden sumar:

$$S = 10.000(1 + 0,06)^5 + 10.000(1,06)^4 + 10.000(1,06)^3 + 10.000(1,06)^2 + 10.000(1,06) + 10.000$$

Se puede hallar el factor común: 10.000

$$S = 10.000 [(1,06)^5 + (1,06)^4 + (1,06)^3 + (1,06)^2 + (1,06) + 1]$$

Al ordenar en forma ascendente,

$$S = 10.000 [1 + (1,06) + (1,06)^2 + (1,06)^3 + (1,06)^4 + (1,06)^5]$$

Resulta una progresión geométrica cuya razón es (1,06)

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1} \quad a = 1; r = 1,06; n = 6$$

Entonces:

$$S = 10.000 \left| \frac{(1,06)^6 - 1}{1,06 - 1} \right| = 10.000 (6,975318)$$

$$S = \text{S/. } 69.753,183$$

Generalizando:

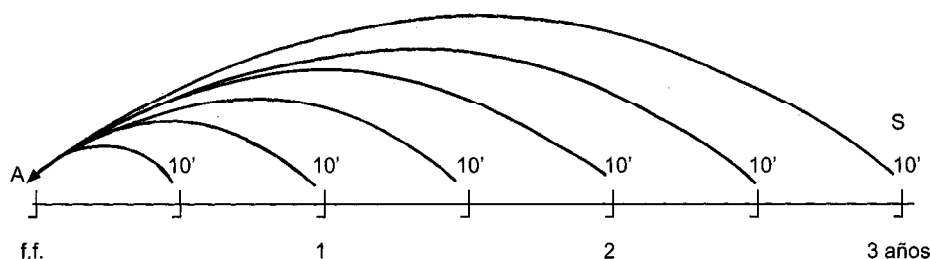
$$R = S / 10.000; i = 0,06; S = \text{monto}; n = 6$$

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (6.1)$$

que es la fórmula del monto de una anualidad.

VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD

El valor actual de la misma anualidad puede calcularse tomando como fecha focal el inicio de la anualidad. Cada renta se calculará con el valor actual que le corresponde, relacionada con el inicio de la anualidad y con la respectiva tasa de interés. Para la demostración se utilizará un ejemplo similar al anterior, pero en este caso se trata de una serie de pagos semestrales de \$/ 10.000 durante 3 años con una tasa de interés de 12% anual capitalizable semestralmente



$$A = 10.000(1 + 0,06)^{-1} + 10.000(1,06)^{-2} + 10.000(1,06)^{-3} + 10.000(1,06)^{-4} + 10.000(1,06)^{-5} + 10.000(1,06)^{-6} =$$

Al hallar el factor común

$$A = 10.000 [(1,06)^{-1} + (1,06)^{-2} + (1,06)^{-3} + (1,06)^{-4} + (1,06)^{-5} + (1,06)^{-6}] =$$

resulta una progresión geométrica cuya razón $(1,06)^{-1} < 1$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Entonces:

$$A = 10.000 \left[\frac{(1,06)^{-1} - (1,06)^{-1} [(1,06)^{-1}]^6}{1 - [(1,06)^{-1}]} \right]$$

$$A = 10.000 \left[\frac{\frac{1}{1,06} - \frac{1}{1,06} (1,06)^{-6}}{\frac{1,06 - 1}{1,06}} \right]$$

$$A = 10.000 \left| \frac{1 - (1,06)^{-6}}{0,06} \right|$$

$$A = 10.000 (4,917324) = S/. 49.173,24$$

Generalizando,

$$A = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] \quad (6.2)$$

que es la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria simple.

Los símbolos utilizados en las fórmulas y valor actual de las anualidades son:

R = el pago periódico o renta;

i = tasa de interés por periodo de capitalización;

j = tasa nominal anual;

n = número de periodos de pago;

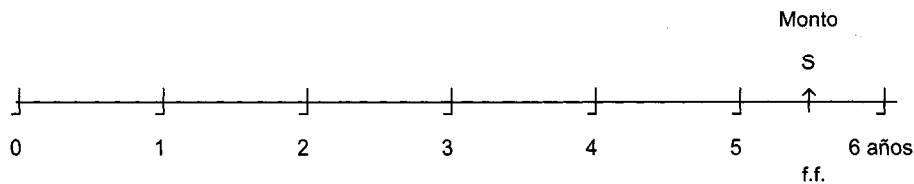
S = monto de una anualidad o suma de todas sus rentas;

A = valor actual de una anualidad o suma de los valores actuales de las rentas.

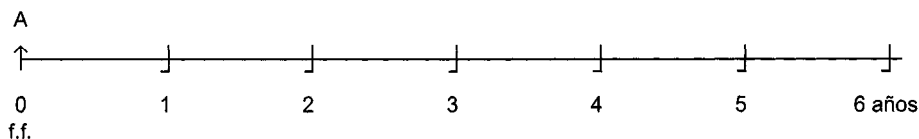
Tanto S como A pueden calcularse directamente mediante calculadoras electrónicas, por logaritmos o utilizando las tablas de valores por tasa de interés (i) y por periodo de pago (n).

EJEMPLO 6.1

Hallar el monto y el valor actual de una anualidad de S/. 10.000 cada trimestre durante 5 años y 6 meses a 12% capitalizable trimestralmente (anualidad vencida simple).



Valor actual



$$n = [(5)(4) + 2] = 22 \text{ rentas}$$

$$i = 0,12/4 = 0,03; R = S/. 10.000; S = ?; A = ?$$

Para calcular el monto se aplica la fórmula 6.1:

$$S = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Se toma como fecha focal el término de la anualidad y se aplica la fórmula indicada.

$$S = 10.000 \left[\frac{(1 + 0,03)^{22} - 1}{0,03} \right]$$

$$S = 10.000 \left[\frac{1,916103 - 1}{0,03} \right]$$

$$S = 10.000 (30,536780)$$

$S = S/. 305.367,80$, monto de la anualidad.

Para calcular el valor actual se toma como fecha focal el inicio de la anualidad y se aplica la fórmula 6.2:

$$A = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$A = 10.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,03)^{-22}}{0,03} \right]$$

$$A = 10.000 \left[\frac{1 - 0,521893}{0,03} \right]$$

$$A = 10.000 (15,936917)$$

$A = S/. 159.369,17$, valor actual de la anualidad.

Como se puede observar, el valor del monto (S) y el valor actual (A) difieren notablemente, por concepto y por forma de cálculo, a pesar de que los datos del ejemplo son los mismos.

CÁLCULO DE LA RENTA O PAGO PERIÓDICO

El pago periódico o renta de una determinada cantidad, sea deuda o fondo por acumularse —como es el caso de las cuotas periódicas para cancelar una deuda, el valor que debe depositarse en una cuenta para constituir un capital, etc.—, puede calcularse con base en las dos fórmulas anteriormente anotadas: la del monto (S) y la del valor actual (A).

Cálculo de la renta (R) a partir del monto (S)

Se despeja R en la fórmula 6.1,

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad (6.3)$$

Para el cálculo de R deben conocerse las otras variables:

S , n , i . Esta fórmula permite calcular el valor del depósito o renta periódica para constituir un fondo de valor futuro.

Cálculo de la renta (R) a partir del valor actual (A)

Se toma la fórmula 6.2 y se despeja R

$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}} \quad (6.4)$$

Para el cálculo de R deben conocerse las otras variables:

A , n , i . Esta fórmula permite calcular el valor de la cuota o pago periódico con el cual se paga o amortiza una deuda.

Los valores de dichas rentas pueden encontrarse en las tablas de fondos de valor futuro y de amortización, respectivamente, en función de n pagos y la tasa de interés i , por periodo de pago.

EJEMPLO 6.2

Calcular el valor del depósito mensual que debe hacer una persona en una institución financiera que paga 14,4% anual, capitalizable mensualmente, a fin de obtener S/. 640.000 en 6 años. Además, calcular los intereses que ganará.

$$R = ?; S = \text{S/. } 640.000; i = \frac{0,144}{12} = 0,012;$$

$$n = (6)(12) = 72$$

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad (6.4)$$

$$R = \frac{640.000}{\frac{(1 + 0,012)^{72} - 1}{0,012}}$$

$$R = \frac{640.000}{113,37178}$$

$$R = \text{S/. } 5.645,14$$

$$\text{Intereses: } 640.000 - 5.645,14 (72) = \text{S/. } 233.549,92$$

$$I = S - n(R)$$

EJEMPLO 6.3

Calcular el valor de la cuota semestral que debe pagar una empresa que tiene una deuda de S/. 4.000.000 a 8 años de plazo, con una tasa de interés de 18% capitalizable semestralmente.

$$R = ?; i = \frac{0,18}{2} = 0,09; n = (8)(2) = 16$$

$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} \quad (6.4)$$

$$R = \frac{4.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,09)^{-16}}{0,09}}$$

$$R = \frac{4.000.000}{8,3125581} = \text{S/. } 481.199,64$$

$$\text{Intereses: } I = 481.199,64 (16) - 4.000.000$$

$$I = \text{S/. } 3.699.194,22$$

$$I = n(R) - A$$

En general, para la acumulación de capitales o fondos se utiliza la suma de una anualidad; es decir, la fórmula del monto (S); para el pago de una deuda se utiliza la fórmula del valor actual (A).

CÁLCULO DEL NÚMERO DE PERIODOS DE PAGO

Conocidos el monto o valor actual de una anualidad, la renta y la tasa de interés, se puede calcular el número de periodos de pago (n).

Partiendo de la fórmula del monto (S), se puede calcular (n).

$$S = R \left| \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right| \quad \frac{S}{R} = \left| \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|$$

$$\frac{Si}{R} + 1 = (1 + i)^n$$

Aplicando logaritmos,

$$\log \left(\frac{Si}{R} + 1 \right) = n \log(1 + i);$$

$$\frac{\log(Si/R + 1)}{\log(1 + i)} = n \quad (6.5)$$

Así mismo, mediante la fórmula del valor actual (A):

$$A = R \left| \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right| \quad \frac{Ai}{R} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

$$1 - \frac{Ai}{R} = (1 + i)^{-n}$$

Aplicando logaritmos,

$$\log(1 - Ai/R) = -n \log(1 + i)$$

$$-n = \frac{\log \left| 1 - \frac{Ai}{R} \right|}{\log(1 + i)}$$

$$n = - \frac{\log \left| 1 - \frac{Ai}{R} \right|}{\log(1 + i)}; \quad (6.6)$$

para $\frac{Ai}{R} < 1$; n es real. También puede calcularse n mediante interpolación de tablas.

EJEMPLO 6.4

Caso de acumulación de fondos o valor futuro.

¿Cuántos depósitos de S/. 25.000 debe hacer una persona cada trimestre para obtener S/. 750.000, considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente?

$$R = \text{S/. } 25.000; S = \text{S/. } 750.000; i = \frac{0,15}{4} = 0,0375; n = ?$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{Si}{R} + 1 \right)}{\log(1 + i)} \quad \text{Aplicando la formula (6.5)}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{750.000(0,0375)}{25.000} + 1 \right)}{\log(1 + 0,0375)} = \frac{\log(2,125)}{\log(1,0375)}$$

$$n = \frac{0,327358}{0,015988} = 20,47516 \text{ depósitos trimestrales.}$$

Se hacen 20 depósitos de S/. 25.000 y un depósito último menor. Éste puede calcularse en el caso de que se realice conjuntamente con el vigésimo depósito.



$$750.000 = 25.000 \left[\frac{(1 + 0,0375)^{20} - 1}{0,0375} \right] + X$$

$$750.000 = 25.000 (29,017387) + X$$

$$750.000 = 725.434,66 + X$$

$$X = S/. 24.565,34$$

Son 20 depósitos de S/. 25.000 y un último depósito de S/. 24.565,34, coincidente con el vigésimo depósito.

También se puede calcular el valor del último depósito un trimestre después:

$$750.000 = 25.000 \left[\frac{(1 + 0,0375)^{20} - 1}{0,0375} \right] (1 + 0,0375) + X$$

$$750.000 = 25.000 [(29,017387)(1,0375)] + X$$

$$750.000 = 752.638,46 + X$$

Si transcurre un trimestre adicional al vigésimo, no se requiere realizar ningún otro depósito puesto que el valor acumulado excede los S/. 750.000 en S/. 2.638,46.

EJEMPLO 6.5

Caso de pago de deudas.

¿Cuántos pagos de S/. 12.000 debe hacer una persona cada mes para cancelar una deuda de S/. 690.000, considerando una tasa de interés de 18% capitalizable mensualmente?

$$R = S/. 12.000; A = S/. 690.000; i = \frac{0,18}{12} = 0,18; n = ?$$

$$n = \frac{\log \left(1 - \frac{Ai}{R} \right)}{\log(1 + i)} \quad \text{se aplica la fórmula (6.6)}$$

$$n = \frac{\log \left(1 - \frac{690.000(0,015)}{12.000} \right)}{\log(1 + 0,015)} = \frac{\log(1 - 0,8625)}{\log(1,015)}$$

Nota

$$\frac{Ai}{R} < 1; 0,8625 < 1 \text{ para que sea factible el cálculo de } n$$

$$n = \frac{\log(0,1375)}{\log(1,015)} = \frac{0,862697}{0,006466} = 133,4206 \text{ meses}$$

Debe hacer 133 pagos mensuales de S/. 12.000 y un pago mensual menor.

Para calcular el último pago después de 1 mes se tiene:

$$690.000 = 12.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,15)^{-133}}{0,015} \right] + X (1 + 0,015)^{-134}$$

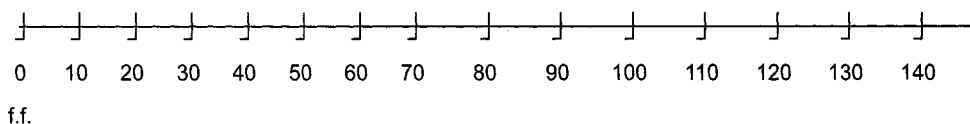
$$690.000 = 12.000 (57,463757) + X (0,136003)$$

$$690.000 = 689.565,09 + X (0,136003)$$

$$\frac{434,91}{0,136004} = X$$

$$S/. 3.197,78 = X$$

Se ha tomado como fecha focal el inicio de la anualidad.



Son 133 pagos de S/. 12.000 y un pago final de S/. 3.197,78, un mes más tarde.

Así mismo, se puede calcular el pago final en la misma fecha del último pago completo:

$$690.000 = 12.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,015)^{-133}}{0,015} \right] + X (1,015)^{-133}$$

$$690.000 = 12.000 (57,46376) + X (0,13804)$$

$$690.000 = 689.565,12 + X (0,13804)$$

$$\frac{434,88}{0,13804} = X$$

$$S/. 3.150,39 = X$$

Son 133 pagos de S/. 12.000 y un último pago de S/. 3.150,39, coincidente con el 133.

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS (i)

El cálculo de la tasa de interés por periodo de pago (i) se puede calcular partiendo de la fórmula del monto (S) o la del valor actual (A) en una anualidad en la cual se conozcan las demás variables: R y n .

Partiendo de la fórmula 6.1 del monto de una anualidad (S)

$$\frac{S}{R} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \quad (6.7)$$

Se resuelve por interpolación de tablas o por aproximaciones, dando diferentes valores a (i).

Partiendo de la fórmula del valor actual (A) de una anualidad

$$\frac{A}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (6.8)$$

Se resuelve por interpolación de tablas o por aproximaciones, dando diferentes valores a (i) .

EJEMPLO 6.6

¿Cuál será la tasa de interés anual, capitalizable trimestralmente, a la que una serie de depósitos de S/. 30.000 efectuados al final de cada trimestre podrá constituir un fondo de S/. 800.000 en 5 años?

$$S = \text{S/. } 800.000; R = \text{S/. } 30.000; n = (5)(4) = 20$$

$$\frac{S}{R} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \quad \text{se aplica la fórmula (6.7)}$$

$$\frac{800.000}{30.000} = \frac{(1 + i)^{20} - 1}{i}$$

$$26,666667 = \frac{(1 + i)^{20} - 1}{i}$$

Utilizando las tablas de $\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$,

se busca i cuando $n = 20$

Valor de i	Valor en tablas	
0,030	26,870374	
0,025	25,544657	
0,005	1,325716	26,666666 se resta del valor menor
		<u>25,544657</u>
		1,122009

Planteando una regla de tres:

$$\begin{array}{rcl} 0,005 & \text{-----} & 1,325716 \\ X & \text{-----} & 1,122009 \end{array}$$

$$X = \frac{(0,005)(1,122009)}{1,325716}$$

$$X = 0,004231$$

Entonces,

$$i = 0,025 + 0,004231 = 0,029231$$

$$i = 2,92\% \text{ (tasa trimestral)}$$

$$i = (0,029231)(4) = 0,116926$$

$$i = 11,6926\% \text{ anual capitalizable trimestralmente.}$$

EJEMPLO 6.7

¿Cuál será la tasa de interés anual, capitalizable mensualmente, a la que una persona debe realizar 90 pagos de S/. 20.000 al final de cada mes para cancelar una deuda de S/. 750.000?

$$A = \text{S/. } 750.000; R = \text{S/. } 20.000; n = 90; i = ?$$

$$\frac{A}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (6.8)$$

$$\frac{750.000}{20.000} = \frac{1 - (1 + i)^{-90}}{i}$$

$$37,5 = \frac{1 - (1 + i)^{-90}}{i}$$

Se utiliza la tabla de $\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Valor en tablas para $n = 90$

Valor de i	Valor en tablas	
0,02	41,586929	37,500000 (se resta del valor menor)
0,025	35,665768	-35,665768
-0,005	5,921160	1,834231

Planteando una regla de tres:

$$\begin{array}{rcl} -0,005 & \text{-----} & 5,921160 \\ X & \text{-----} & 1,183423 \end{array}$$

$$X = \frac{(-0,005)(1,183423)}{5,921160}$$

$$X = 0,000999$$

Como la serie es descendente cuando la tasa de interés aumenta, se resta de la tasa de interés mayor:

$$\begin{array}{r} 0,025 \\ -0,000999 \\ \hline 0,024001 \end{array}$$

$$i = 0,024$$

$$i = 2,4\% \text{ mensual}$$

$$i = (2,4)(12) = 28,8\% \text{ anual capitalizable mensualmente.}$$

Para averiguar, a qué tasa efectiva es equivalente, se procede así:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$$(1 + i) = (1 + 0,288/12)^{12}$$

$$i = 1,329228 - 1$$

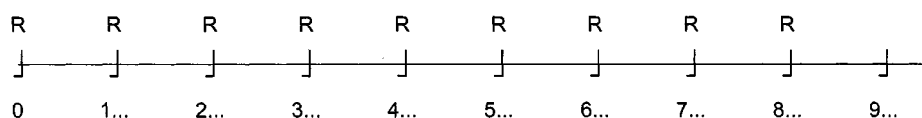
$$i = 0,329228 = 32,9228\% \text{ efectiva.}$$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Las anualidades anticipadas (ciertas y simples) son aquellas que se efectúan o vencen al principio de cada periodo de pago o depósito. Los ejemplos más comunes son los arriendos de edificios, oficinas, terrenos, casas, pólizas de seguros, etc.

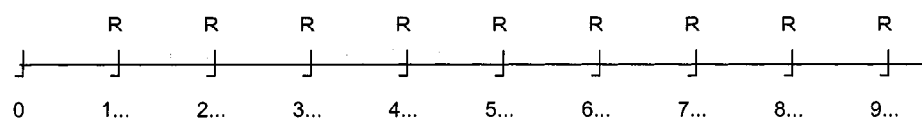
“Una anualidad anticipada es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen al principio del periodo de pago”⁵.

Anualidad anticipada



1 de ene. 1 de feb. 1 de mar.

Anualidad vencida



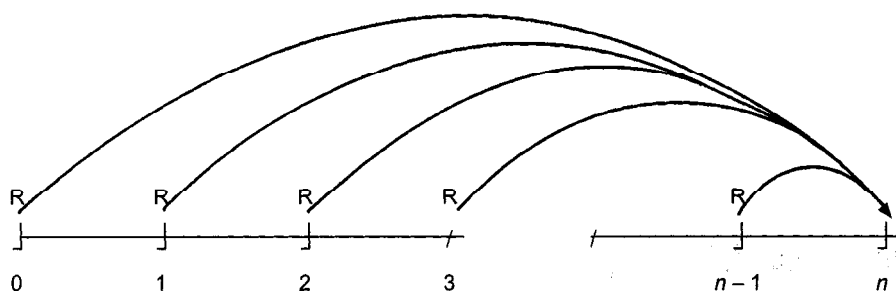
Ene. 30 Feb. 28 Mar. 30

En la gráfica se observa la diferencia entre las anualidades anticipadas y las vencidas, dependiendo de si los pagos o depósitos se realizan al comienzo o al final de cada periodo. En la anticipada se comienza a pagar desde el periodo 0 y se termina en el periodo 8. En la vencida se empieza a pagar desde el periodo 1 y se termina en el periodo 9.

El monto y el valor actual de las anualidades anticipadas.

Monto de una anualidad anticipada puede calcularse mediante la siguiente gráfica:

5. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 123.



donde R es la renta o pago periódico, y n el número de periodos de capitalización. Además, se considera una tasa de interés (i) por periodo de pago, un monto S y como fecha focal, la del término de la anualidad.

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} \dots + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i)^1$$

Al ordenar y sacar el factor común R ,

$$S = R[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^n]$$

que es una progresión geométrica cuya razón es

$$(1+i) > 1$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1} \quad (\text{fórmula de la progresión geométrica}) \quad (6.9)$$

Remplazando,

$$S = R \left[\frac{(1+i)(1+i)^n - (1+i)}{(1+i) - 1} \right]$$

y sacando factor común $(1+i)$, se tiene:

$$S = R(1+i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (\text{fórmula del monto de una anualidad anticipada}) \quad (6.10)$$

EJEMPLO 6.8

Una persona deposita al principio de cada trimestre S/. 50.000 a una tasa de interés de 12% anual capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto habrá acumulado en 5 años?

$$S = ?; R = \text{S/. } 50.000; i = \frac{0,12}{4} = 0,03; n = (5)(4) = 20$$

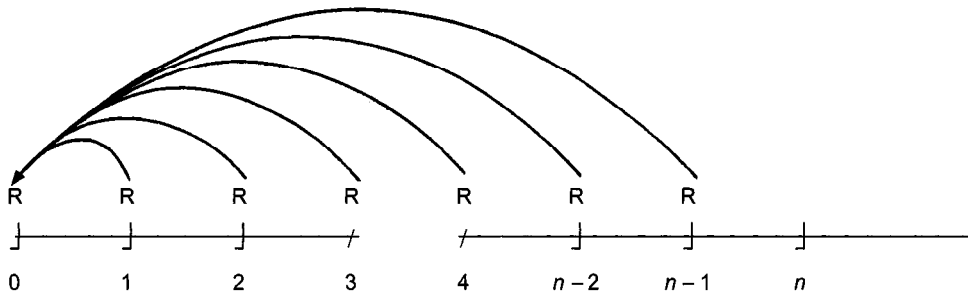
Se aplica la fórmula 6.10

$$S = 50.000(1+0,03) \left[\frac{(1+0,03)^{20} - 1}{0,03} \right]$$

$$S = 50.000 (1,03) (26,870374) = \text{S/. } 1.383.824,29$$

Valor actual de una anualidad anticipada

El valor actual de una anualidad anticipada puede calcularse en forma análoga al monto; pero se toma como fecha focal el inicio de la anualidad.



Sea R la renta, n el número de periodos de pago, i la tasa de interés por periodo de pago.

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \dots + R(1+i)^{-(n-1)}$$

Sacando factor común,

$$A = R[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n+1}]$$

resulta una progresión geométrica cuya razón es $(1+i)^{-1} < 1$. Luego se utiliza la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$$A = R \left[1 + \frac{(1+i)^{-1} + (1+i)^{-1} (1+i)^{-n+1}}{1 - (1+i)^{-1}} \right]$$

$$A = R \left[1 + \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1(1+i)^{-n+1}}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} \right]$$

$$A = R \left[1 + \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1}{1+i}} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{1+i-1} \right] \right]$$

$$A = R \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right] \quad (6.11)$$

O también:

$$A = R + R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right]$$

Valor actual de una anualidad anticipada

EJEMPLO 6.9

Una persona realiza pagos al principio de cada mes por un valor de S/. 18.000; a una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto habrá pagado de capital en 7 años? (Valor de la deuda original).

$$A = ?; R = \text{S/. } 18.000; i = \frac{0,15}{12} = 0,0125; n = (7)(12) = 84$$

$$A = R \left| 1 + \frac{1 - (1 + i)^{-n+1}}{i} \right| \quad \text{Aplicando la fórmula (6.11)}$$

$$A = 18.000 \left| 1 + \frac{1 - (1,0125)^{-84+1}}{0,0125} \right|$$

$$A = 18.000 \left| 1 + \frac{1 - (1,0125)^{-83}}{0,0125} \right|$$

$$A = 18.000 (52.469963)$$

$$A = \text{S/. } 944.459,33$$

GRADIENTES

Cuando se manejan series de pagos, cuotas o valores que crecen o decrecen de manera uniforme, se trata de *Gradientes*, cuya aplicación se realiza en el cálculo de cuotas crecientes y decrecientes, proyección de presupuestos y otras formas prácticas.

Algunos autores e investigadores de las matemáticas financieras han diseñado una serie de fórmulas para calcular en forma rápida y normalizada. En el presente texto, se presentan algunos ejemplos en que se analiza lo fundamental de los gradientes.

EJEMPLO 6.10

Un negocio de panadería tiene registrados los siguientes gastos mensuales en harina:

Mes	Gasto real S/.
1	79.900
2	81.050
3	81.950
4	83.025
5	83.990
6	85.010



¿Cuál será su proyección de gasto para los próximos 6 meses, si se considera una tasa de interés de 1,5% mensual?

Para resolver este problema se recurrirá al modelo establecido por Alberto Álvarez Arango⁶.

Mes	Gasto real S/.	Gasto aproximado S/.	En forma de gradiente S/.
1	79.900	80.000	$80.000 + 0$
2	81.050	81.000	$80.000 + 1.000$
3	81.950	82.000	$80.000 + 2.000$
4	83.025	83.000	$80.000 + 3.000$
5	83.990	84.000	$80.000 + 4.000$
6	85.010	85.000	$80.000 + 5.000$

Proyección para los próximos 6 meses con $i = 1,5\%$ mensual:

Mes	Gasto aproximado en forma de gradiente S/.
7	$85.000[1 + 0,015(1)] = 86.275$
8	$85.000[1 + 0,015(2)] = 87.550$
9	$85.000[1 + 0,015(3)] = 88.825$
10	$85.000[1 + 0,015(4)] = 90.100$
11	$85.000[1 + 0,015(5)] = 91.375$
12	$85.000[1 + 0,015(6)] = 92.650$

En este ejemplo se supone que la tasa de interés no varía durante el tiempo de la proyección.

EJEMPLO 6.11

Una empresa tiene que realizar 5 pagos mensuales para cancelar su deuda de acuerdo con el siguiente detalle:

6. Alberto Álvarez A., *Matemáticas financieras*, Ed. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá, Colombia, 1995.

Cuota	Valor del pago S/.
1	500.000
2	525.000
3	550.000
4	575.000
5	600.000
Total	2.750.000

Si se considera una tasa de interés de 30% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor de la cuota uniforme que remplazaría los citados pagos?

Primero se calcula el valor actual de la deuda.

$$A = 500.000(1,025)^{-1} + 525.000(1,025)^{-2} + 550.000(1,025)^{-3} + 575.000(1,025)^{-4} + 600.000(1,025)^{-5}$$

$$A = \text{S/}. 2.549.471,306$$

Luego se calcula el valor de la cuota uniforme, aplicando la fórmula (6.4).

$$R = \frac{2.549.471,306}{\frac{1 - (1,025)^{-5}}{0,025}}$$

$$R = \text{S/}. 548.765,70$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el monto de una serie de depósitos de S/. 50.000 cada 6 meses, durante 8 años a 14% anual capitalizable semestralmente.

Respuesta

$$S = \text{S/}. 1.394.402,68$$

2. Calcular el valor actual de una serie de pagos de S/. 15.000 cada mes durante 15 años a 1% mensual.

Respuesta

$$A = \text{S/}. 1.249.825$$

3. Si una persona deposita S/. 30.000 cada trimestre, ¿cuánto habrá acumulado en 10 años a 4% de interés trimestral?

Respuesta

$$S = \text{S/}. 2.850.765,47$$

4. Calcular el monto, destinado para reposición de un activo fijo, de una serie de depósitos de S/. 100.000 durante 7 años a una tasa de interés de 21% anual capitalizable trimestralmente.

Respuesta

$$S = S/. 6.076.280,60$$

5. Una persona debe 35 cuotas de S/. 25.000 pagaderos al final de cada mes. Calcular el valor actual de la deuda considerando una tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente.

Respuesta

$$A = S/. 676.889,86$$

6. ¿Qué opción conviene más al comprador de un automóvil: S/. 600.000 al contado o S/. 200.000 iniciales y 23 cuotas de S/. 20.000 al final de cada mes, considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente?

Respuesta

La segunda opción

7. ¿Qué cantidad debió depositarse el 1 de abril de 1980 en una cuenta de ahorros que pagó 12% anual capitalizable semestralmente, con el propósito de realizar retiros semestrales de S/. 50.000 cada uno desde el 1 de octubre de 1993 hasta el 1 de abril de 1998?

Respuesta

$$S/. 80.891,08$$

8. Una empresa necesita acumular S/. 8.000.000 en 9 años. ¿Qué cantidad de dinero debe depositar al final de cada trimestre en una institución financiera que reconoce 12% anual capitalizable trimestralmente?

Respuesta

$$S/. 126.430,35$$

9. ¿Qué cantidad debe pagarse en cada mes con el propósito de cancelar una deuda de S/. 900.000 durante 10 años, considerando una tasa de interés de 15% capitalizable mensualmente?

Respuesta

$$S/. 14.520,15$$

10. Una empresa requiere acumular S/. 10.000.000 mediante depósitos semestrales de S/. 300.000 a una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente. ¿Cuán-

tos depósitos completos debe realizar y con qué depósito adicional, realizado en la misma fecha del último depósito anual, completará su monto?

Respuesta

17 depósitos de S/. 300.000 y un último depósito de S/. 747.934,86

11. ¿Con qué depósito adicional, realizado un semestre después del último depósito completo, acumulará el monto del problema anterior?

Respuesta

S/. 100.290,34 (17 depósitos de S/. 300.000 y uno adicional de S/. 100.290,34)

12. ¿Cuántos pagos completos de S/. 18.000 al final de cada mes son necesarios para cancelar una deuda de S/. 1.200.000, considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente? ¿Con qué pago final, coincidente con el último pago completo, se cancelará la citada deuda?

Respuesta

144 pagos completos de S/. 18.000 y un pago adicional de S/. 4.193,75

13. ¿Con qué pago adicional, realizado un mes después del último pago completo, se cancelará la deuda citada en el problema anterior?

Respuesta

144 pagos completos de S/. 18.000 y un pago adicional, un mes más tarde, de S/. 4.246,17

14. ¿Cuál será la tasa de interés anual capitalizable trimestralmente a la que una serie de depósitos de S/. 100.000 cada trimestre podrá constituir un fondo de S/. 5.000.000 en 5 años?

Respuesta

35,2% anual capitalizable trimestralmente

15. ¿Qué tasa de interés anual capitalizable mensualmente se aplica a una serie de pagos de S/. 19.325,06 al final de cada mes, necesarios para cancelar una deuda de S/. 1.200.000 en 15 años? ¿a qué tasa efectiva es equivalente?

Respuestas

a) 18% anual capitalizable mensualmente; b) 19,56% efectiva

16. Una empresa deposita al principio de cada trimestre S/. 150.000 durante 5 años. ¿Cuánto habrá acumulado considerando una tasa de interés de 14% anual capitalizable trimestralmente?

Respuesta

S/. 4.390.420,60

17. Una persona realiza pagos al principio de cada mes por valor de S/. 17.400, considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto habrá pagado de capital en 10 años?

Respuesta

S/. 1.091.982,81

18. Una persona solicita un préstamo a un banco a 3 años de plazo, indicando que puede pagar cuotas de hasta S/. 900.000 mensuales. Calcular el valor del préstamo que le concedería el banco si le cobra una tasa de interés de 36% anual capitalizable mensualmente.

Respuesta

S/. 19.649.027,25

19. Una empresa necesita constituir durante 10 años un fondo de depreciación de S/. 700.000.000 para reposición de maquinaria; calcular el valor del depósito trimestral que deberá realizar en una institución financiera que paga una tasa de interés de 24% anual capitalizable trimestralmente.

Respuesta

S/. 4.523.075,15

20. Calcular el valor de los depósitos mensuales que durante 10 años deberá hacer una persona en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 18% anual, capitalizable mensualmente, a fin de efectuar retiros de S/. 500.000 mensuales durante los 5 años siguientes.

Respuesta

S/. 59.435,06

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcular el monto de una serie de depósitos de S/. 100.000 cada trimestre durante 6 años y 9 meses, considerando una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente.
2. En el ejercicio anterior, calcular los intereses que genera la operación.
3. Al nacer su hijo, un padre empieza a realizar una serie de depósitos mensuales de S/. 200.000 en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente. Calcular cuánto habrá acumulado cuando su hijo cumpla 18 años.

4. En el problema anterior, calcular los intereses que genera la operación.
5. Una empresa requiere conformar un fondo de valor futuro para reemplazar equipos de trabajo, mediante cuotas trimestrales de S/. 900.000. ¿Cuánto habrá acumulado en 10 años, que es la vida útil de los equipos, si se considera una tasa de interés de 21% anual capitalizable trimestralmente?
6. El cliente de un banco solicita un préstamo a 5 años de plazo e indica que su capacidad de pago es S/. 700.000 mensuales. Calcular el valor del préstamo que el banco le acreditaría, si le cobra una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente.
7. En el problema anterior, calcular los intereses que pagaría el referido cliente.
8. Una empresa desea acumular un fondo de S/. 900.000.000 para reposición de maquinarias, mediante depósitos trimestrales durante 7 años en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 22% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor del depósito trimestral.
9. Felipe recibe un préstamo de S/. 35.000.000 a 10 años de plazo para la adquisición de un departamento, comprometiéndose a pagar cuotas mensuales a una tasa de interés de 27% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de la cuota mensual
10. En el problema anterior, calcular los intereses que debería pagar Felipe.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. $R = S/. 100.000$ $i = 0,18/4 = 0,045$ $n = [(6)(12) + 9]/3 = 27$
Aplicando la fórmula 1

$$S = 100.000 \left[\frac{(1 + 0,045)^{27} - 1}{0,045} \right]$$

$$S = S/. 5.071.132,361$$

2. $I = S - n(R)$
 $I = 5.071.132,361 - (27)(100.000)$
 $I = S/. 2.371.132,361$

3. $R = S/. 200.000$ $i = 0,15/12 = 0,0125$ $n = (18)(12) = 216$

$$S = 200.000 \left[\frac{(1 + 0,0125)^{216} - 1}{0,0125} \right] \quad \text{Fórmula (6.1)}$$

$$S = S/. 218.124.503,9$$

4. $I = S - (n)(R)$

$$I = 218.124.503,9 - (218)(200.000)$$

$$I = S/. 174.524.503,9$$

5. $R = S/. 900.000 \quad i = 0,21/4 = 0,0525 \quad n = (10)(12)/3 = 40$

$$S = 900.000 \left[\frac{(1 + 0,0525)^{40} - 1}{0,0525} \right]$$

$$S = S/. 115.586.620,83$$

6. $R = S/. 700.000 \quad i = 0,24/12 = 0,02 \quad n = (5)(12) = 60$

$$A = 700.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,02)^{-60}}{0,02} \right] \quad \text{Fórmula (6.2)}$$

$$A = S/. 24.332.620,67$$

7. $I = (n)(R) - A$

$$I = (60)(700.000) - 24.332.620,67$$

$$I = 42.000.000 - 24.332.620,67$$

$$I = S/. 17.667.379,33$$

8. $S = 900.000.000 \quad i = 0,22/4 = 0,055 \quad n = (7)(12)/3 = 28$

$$R = \frac{900.000.000}{\frac{(1 + 0,055)^{28} - 1}{0,055}} \quad \text{Fórmula (6.3)}$$

$$R = S/. 14.232.959,61$$

9. $A = S/. 35.000.000 \quad i = 0,27/12 = 0,0225 \quad n = (10)(12) = 120$

$$R = \frac{35.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,0225)^{-120}}{0,0225}} \quad \text{Fórmula (6.4)}$$

$$R = S/. 846.089,28$$

10. $I = (n)(R) - A$

$$I = (120)(846.089,28) - 35.000.000$$

$$I = 101.530.713,6 - 35.000.000$$

$$I = S/. 66.530.713,6$$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿En qué consiste una anualidad o renta?
2. ¿Cómo se clasifican las anualidades?
3. ¿Qué es una anualidad cierta, ordinaria y simple?
4. ¿Cuál es la fórmula del monto de una anualidad ordinaria?
5. ¿Cuál es la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria?
6. ¿Cuál es la fórmula de la renta o depósito periódico de una anualidad ordinaria?
7. ¿Cómo se calcula el tiempo en una anualidad en función del monto y en función del valor actual?
8. ¿Cómo se calcula la tasa de interés de una anualidad en función del monto y en función del valor actual?
9. ¿Cuál es la fórmula del monto de una anualidad anticipada?
10. ¿Cuál es la fórmula del valor actual de una anualidad anticipada?

Capítulo 7

AMORTIZACIÓN Y FONDOS DE AMORTIZACIÓN

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Amortización

Cálculo de la cuota o renta

Capital insoluto y tabla de amortización

Forma de elaboración de la tabla de amortización gradual

Cálculo del saldo insoluto

Reconstrucción de la tabla de amortización

Periodo de gracia

Derechos del acreedor y el deudor

Amortizaciones con reajuste de la tasa de interés

Cálculo de la renta cuando no coincide el periodo de pago con el periodo de capitalización

Fondos de amortización o de valor futuro

El saldo insoluto en fondos de amortización

La unidad de valor constante (UVC)

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN









La amortización y los fondos de valor futuro, o fondos de amortización, son aplicaciones de las anualidades o rentas estudiadas en el capítulo anterior. En el caso de las amortizaciones se utilizan para programas de endeudamiento a largo plazo; en el caso de los fondos de amortización, para constituir fondos de valor futuro.

Actualmente, el sistema de amortización gradual tiene una utilización bastante acentuada en todo el sistema financiero, compuesto por bancos, cooperativas, mutualistas, financieras, etc., en lo que respecta al crédito a mediano y largo plazo, ya sea para la compra de bienes inmuebles —como terrenos, casas o departamentos—, o para la adquisición de automotores, maquinaria o crédito comercial. Así mismo, para la constitución de fondos de valor futuro o fondos de depreciación, con el propósito de reponer activos fijos o para formar capitales o seguros cuyo propósito sea el otorgar pensiones.

OBJETIVO GENERAL

Conocer y manejar el proceso de amortización gradual, así como el proceso de formación de fondos de valor futuro.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

-  Calcular la renta o pago periódico.
-  Elaborar las tablas de amortización gradual.
-  Reconstruir tablas de amortización gradual.
-  Calcular reajustes de las tablas por variación en la tasa de interés en los endeudamientos por amortización gradual.
-  Calcular los derechos del acreedor y el deudor.
-  Elaborar las tablas de valor futuro.
-  Reconstruir las tablas de valor futuro o de fondos de amortización.
-  Conocer las Unidades de Valor Constante y su forma de cálculo.

CONDUCTA DE ENTRADA

1. ¿Cuál es la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad vencida?
2. ¿Cuál es la fórmula del valor actual de una anualidad vencida?
3. ¿Cuál es la fórmula de la renta en función del monto de una anualidad vencida?
4. ¿Cuál es la fórmula del monto de una anualidad vencida?
5. ¿En qué consiste amortizar una deuda?
6. ¿Qué es formar un fondo de valor futuro?
7. ¿Cómo se calcula el valor de la cuota periódica para amortizar una deuda?
8. ¿Cómo se calcula el valor de la cuota periódica para acumular un fondo de valor futuro?

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

1. La fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad es

$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$

2. La fórmula del valor actual de una anualidad es

$$A = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

3. La fórmula de la renta en función del monto de una anualidad es

$$R = \frac{S}{\frac{(1 + i)^n - 1}{i}}$$

4. La fórmula del monto de una anualidad es

$$S = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

5. Amortizar una deuda es reducirla, mediante pagos periódicos, hasta su cancelación total.



6. Formar un fondo de valor futuro es realizar depósitos periódicos que ganan intereses para formar un capital en un tiempo establecido.
7. Mediante la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad.
8. Mediante la fórmula de la renta en función del monto de una anualidad.

AMORTIZACIÓN

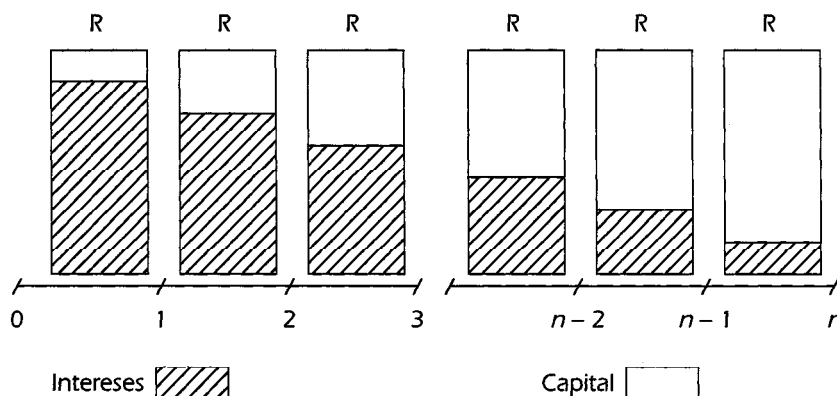
Es muy frecuente la utilización del término amortizar como el proceso de extinción de una deuda, con su interés compuesto, mediante una renta o pago durante un determinado número de periodos; para efectos del presente texto, se empleará este término en ese sentido.

"Amortizar es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses por medio de pagos periódicos"¹.

"Amortizar: se dice que un documento que causa intereses está amortizado cuando todas las obligaciones contraídas (tanto capital como intereses) son liquidadas mediante una serie de pagos (generalmente iguales) hechos en intervalos de tiempos iguales"².

CÁLCULO DE LA CUOTA O RENTA

En la amortización cada renta o pago sirve para cubrir los intereses y reducir el capital; es decir, cada pago está compuesto por capital e intereses. La composición del pago o renta, aunque es constante en su cantidad, varía en función del número de periodos de pago: mientras aumenta el número, disminuirá el interés y se incrementará el capital por cuota. En la siguiente gráfica se puede observar el comportamiento de la amortización.



1. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 175.

2. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, p. 95.

En general, cuando el número de cuotas es grande, en las primeras cuotas se paga más interés y en las últimas más capital. Para el cálculo de la cuota o renta se utiliza la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad vencida.

$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$

EJEMPLO 7.1

Una empresa consigue un préstamo de S/. 3.000.000 con intereses a 14% anual capitalizable semestralmente, el cual será amortizado mediante pagos iguales, cada semestre, durante 3 años y 6 meses. Calcular el valor del pago semestral.

Solución:

$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$

$$A = 3.000.000; R = ?; n = [(3)(12) + 6]/6 = 7;$$

$$i = \frac{0,14}{2} = 0,07$$

$$R = \frac{3.000.000}{\frac{1 - (1,07)^{-7}}{0,07}} = \frac{3.000.000}{5,389289} = \text{S/. } 556.659,66$$

El valor del pago o cuota semestral será S/. 556.659,66. En la referida cuota están incluidos el interés y el capital, este último se utiliza para reducir la deuda. Con el transcurso del tiempo y número de cuotas pagadas, disminuye el interés y aumenta el capital por cada cuota, de manera similar a la expresada en la gráfica.

CAPITAL INSOLUTO Y TABLA DE AMORTIZACIÓN

“La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como saldo insoluto o capital insoluto en la fecha...”.

“El capital insoluto, justamente después de que se ha efectuado un pago, es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse”³.

3. *Ibíd.*, p. 95.

La parte de la deuda no pagada constituye el saldo insoluto, como se muestra en el siguiente cuadro denominado Tabla de amortización. Utilizando los datos del ejemplo citado, se detallan los periodos, el capital insoluto, el interés, la cuota y el capital pagado.

Tabla de amortización

Periodo (1)	Capital insoluto al principio del periodo (2)	Interés vencido al final del periodo (3)	Cuota o pago (4)	Capital pagado por cuota al final del periodo (5)
1	S/. 3.000.000,00	S/. 210.000,00	S/. 556.659,66	S/. 346.659,66
2	S/. 2.653.340,34	S/. 185.733,82	S/. 556.659,66	S/. 370.925,84
3	S/. 2.282.414,20	S/. 159.769,01	S/. 556.659,66	S/. 396.890,65
4	S/. 1.885.523,90	S/. 131.986,67	S/. 556.659,66	S/. 424.672,95
5	S/. 1.460.850,90	S/. 102.259,56	S/. 556.659,66	S/. 454.400,10
6	S/. 1.006.450,90	S/. 70.451,56	S/. 556.659,66	S/. 486.208,10
7	S/. 520.242,70	S/. 36.416,99	S/. 556.659,66	S/. 520.242,70
Total		S/. 896.617,61	S/. 3.896.617,62	S/. 3.000.000,00

FORMA DE ELABORACIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN GRADUAL

El interés vencido al final del primer periodo es

$$I = \text{Cit}; I = 3.000.000 (0,07)(1) = \text{S/. } 210.000$$

El capital pagado al final del primer periodo es

$$\text{Cuota} - \text{interés} = 556.659,66 - 210.000 = \text{S/. } 346.659,66.$$

El capital insoluto para el segundo periodo es

$$\text{Capital al principio del primer periodo} - \text{capital pagado al final del primer periodo} \\ = 3.000.000 - 346.659,66 = \text{S/. } 2.653.340,34;$$

El interés vencido al final del segundo periodo es

$$I = 2.653.340(0,07)(1) = \text{S/. } 185.733,82$$

El capital pagado al final del segundo periodo es

$$556.659,66 - 185.733,82 = \text{S/. } 370.925,84$$

El capital insoluto para el tercer periodo es

$$2.653.340,34 - 370.925,84 = \text{S/. } 2.282.414,20$$

y así sucesivamente hasta el último periodo en el cual deben coincidir el capital insoluto al principio del último periodo con el capital pagado al final del último periodo, para la cancelación de la deuda. Como puede apreciarse, los intereses se calculan sobre los saldos deudores.

La columna (4) cuota o pago, menos la columna (3), interés vencido al final del periodo, deben dar como resultado la columna (5) capital pagado al final del periodo, tanto hori-

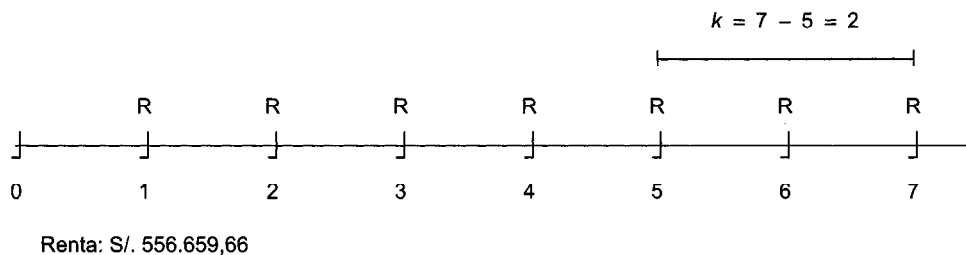
zontal, como verticalmente. A veces pueden ocurrir pequeñas diferencias debido a las aproximaciones; en estos casos, deben reajustarse.

CÁLCULO DEL SALDO INSOLUTO

El capital insoluto puede calcularse para cualquier periodo utilizando la fórmula del valor actual de una anualidad, con ligeras variaciones.

EJEMPLO 7.2

En el ejemplo anterior, calcular el capital insoluto después del quinto pago.



El capital insoluto después del quinto pago es el valor actual de los dos periodos que faltan por cubrirse:

Sea P el saldo insoluto, m el número de cuotas pagadas, n el número total de cuotas y k el número de cuotas que quedan por pagar.

Entonces,

$$k = n - m$$

$$k = 7 - 5 = 2$$

En consecuencia, se tiene la siguiente fórmula del saldo insoluto:

$$P_m = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-k}}{i} \right]$$

$$P_5 = 556.659,66 \left[\frac{1 - (1 + 0,07)^{-2}}{0,07} \right]$$

$$P_5 = \text{S/. } 1.006.450,78$$

valor que se halla en la tabla de amortización como capital insoluto al principio del sexto periodo o, lo que es igual, el capital insoluto luego del quinto periodo.

RECONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN

La tabla de amortización puede rehacerse en cualquier periodo; para ello es necesario calcular primero el saldo insoluto en el periodo que queremos rehacer la tabla, y luego el interés y el capital que correspondan a la determinada cuota.

EJEMPLO 7.3

Calcular la distribución del interés y capital de la cuota 6 del ejemplo citado anteriormente. Puesto que el saldo insoluto es S/. 1.006.450,78 al comienzo del sexto periodo, el interés será:

$$(1.006.450,78)(0,07) = \text{S/. } 70.451,56$$

El capital será:

$$\text{Cuota} - \text{interés} = 556.659,66 - 70.451,56 = \text{S/. } 486.208,10$$

y la tabla puede rehacerse así:

Periodo	Capital insoluto	Interés vencido	Cuota	Capital pagado
6	S/. 1.006.450,78	S/. 70.451,56	S/. 556.659,66	S/. 486.208,10
7				

EJEMPLO 7.4

Una deuda de S/. 4.500.000 se va a cancelar en 3 años mediante el sistema de amortización, con pagos al final de cada semestre a una tasa de interés de 12% capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización con interés sobre saldos deudores.

$$n = (3)(12)/6 = 6; i = 0,12/2 = 0,06$$

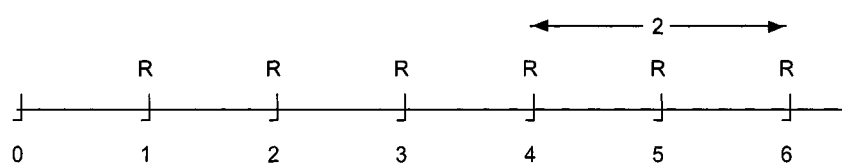
$$R = \frac{A}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} = \frac{4.500.000}{\frac{1 - (1 + 0,06)^{-6}}{0,06}}$$

$$R = \frac{4.500.000}{4,917324} = \text{S/. } 915.131,83$$

Tabla de amortización

Período	Saldo insoluto inicio periodo	Interés	Renta	Capital pagado	Saldo deuda final periodo
1	S/. 4.500.000	S/. 270.000,00	S/. 915.131,83	S/. 645.131,83	S/. 3.854.868,17
2	3.854.868,17	231.292,09	915.131,83	683.839,74	3.171.028,43
3	3.171.028,43	190.261,71	915.131,83	724.870,12	2.446.158,31
4	2.446.158,31	146.769,50	915.131,83	768.362,33	1.677.795,98
5	1.677.795,98	100.667,76	915.131,83	814.464,06	863.331,92
6	863.331,91	51.799,92	915.131,83	863.331,92	0
Total		S/. 990.790,98	S/. 5.490.790,98	S/. 4.500.000,00	

Calcular el saldo insoluto inmediatamente después del pago 4 y la distribución del capital e intereses de la cuota 5.



$$k = 6 - 4 = 2$$

$$P = 915.131,83 \left| \frac{1 - (1 + 0,06)^{-2}}{0,06} \right|$$

$$P = 915.131,83 (1,833393) = \text{S/. } 1.677.795,98$$

Respuesta

El saldo insoluto es S/. 1.677.795,98

Distribución de la cuota 5

$$I = (1.677.795,98)(0,06) = \text{S/. } 100.667,77 \text{ (interés)}$$

Cuota - Interés = Capital pagado

$$915.131,83 - 100.667,77 = \text{S/. } 814.464,06$$

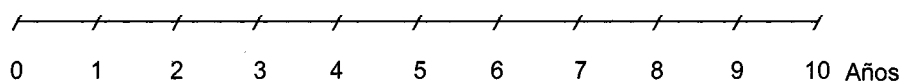
PERIODO DE GRACIA

Con frecuencia se realizan préstamos a largo plazo con la modalidad de amortización gradual, en que se incluye un periodo sin que se paguen cuotas (generalmente sólo se paga el interés), el cual se denomina periodo de gracia, con el propósito de permitir a las empresas o instituciones operar libremente durante un tiempo y luego cubrir las cuotas respectivas.



EJEMPLO 7.5

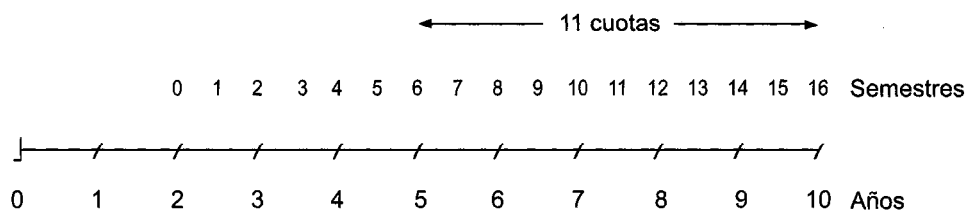
Una empresa consigue un préstamo por un valor de S/. 20.000.000 a 10 años plazo, incluidos 2 de gracia, con una tasa de interés de $9\frac{1}{2}\%$ anual capitalizable semestralmente, para ser pagado mediante cuotas semestrales por el sistema de amortización gradual; la primera cuota deberá pagarse un semestre después del periodo de gracia. Calcular la cuota semestral y el saldo insoluto inmediatamente después de haber pagado la cuota 5 y la distribución de la cuota 6, en lo que respecta al capital e intereses.



periodo de pago: $(8)(2) = 16$ cuotas

En seguida se presenta la gráfica para el saldo insoluto

$$k = 16 - 5 = 11$$



$$R = \frac{20.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,0475)^{-16}}{0,0475}} = \text{S/. } 1.812.706,18$$

$$P = 1.812.706,18 \left[\frac{1 - (1 + 0,0475)^{-11}}{0,0475} \right]$$

$P = 15.256.752,17$ saldo insoluto por pagar (de capital, excluido interés)

La composición de la cuota 6 será, tanto de interés como de capital:

$$I = (15.256.752)(0,0475) = \text{S/. } 724.695,73 \text{ de interés}$$

$$\text{Cuota} - \text{Interés} = \text{Capital pagado por cuota } 1.812.706,18 - 724.695,73 = \text{S/. } 1.088.010,45$$

DERECHOS DEL ACREEDOR Y EL DEUDOR

Cuando se adquiere un bien a largo plazo, o se está pagando una deuda por el sistema de amortización gradual, es común querer conocer qué parte de la deuda está ya pagada en

determinado tiempo o también cuáles son los derechos del acreedor (parte por pagar) o los derechos del deudor (parte pagada).

La relación acreedor deudor se puede representar mediante la siguiente ecuación

$$\text{Derechos del acreedor} + \text{Derechos del deudor} = \text{Deuda}^4$$

$$DA + DD = DO$$

O también

$$\text{Saldo insoluto} + \text{Parte amortizada} = \text{Deuda original.}$$

EJEMPLO 7.6

Una persona adquiere una propiedad mediante un préstamo hipotecario de S/. 1.200.000 a 15 años de plazo. Si debe pagar la deuda en cuotas mensuales iguales y se considera una tasa de interés de 1,5% mensual, calcular los derechos del acreedor y el deudor inmediatamente después de haber pagado la cuota 120.

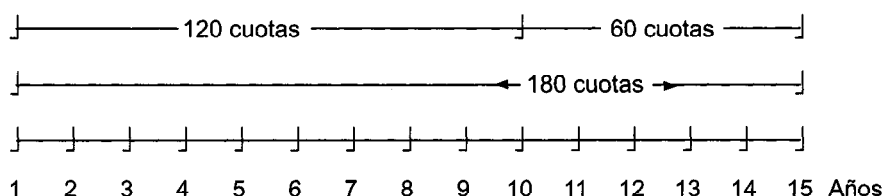
Solución

Se calcula el valor de la cuota mensual.

$$i = 0,015 \quad n = (15)(12) = 180 \text{ cuotas}$$

$$R = \frac{1.200.000}{\frac{1 - (1 + 0,015)^{-180}}{0,015}} = \text{S/. } 19.325,05$$

Se expresa el problema gráficamente.



Saldo insoluto + Parte amortizada = Deuda original

$$19.325,05 \left[\frac{1 - (1 + 0,015)^{-60}}{0,015} \right] + \text{Parte Amortizada} = \text{S/. } 1.200.000$$

$$761.025,67 + \text{Parte amortizada} = \text{S/. } 1.200.000$$

$$1.200.000 - 761.025,67 = \text{Parte amortizada}$$

$$\text{S/. } 438.974,33 = \text{Parte amortizada}$$

La parte amortizada constituye los derechos del deudor, que son S/. 438.974,33.

Por tanto, luego de la cuota 120, se tiene que

$$\text{Derechos de acreedor} + \text{Derechos del deudor} = \text{Deuda original}$$

$$761.025,67 + 438.974,33 = 1.200.000$$

4. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 179.

Es decir que, inmediatamente después que el deudor pague la cuota 120, sus derechos sobre la propiedad que adquiere son S/. 438.974,33 y el saldo de la deuda o saldo insoluto es S/. 761.025,67 (derechos del acreedor).

AMORTIZACIONES CON REAJUSTE DE LA TASA DE INTERÉS

En el medio financiero es frecuente realizar contrataciones de préstamos con el sistema de amortización gradual, en cuyas cláusulas se establece que la tasa de interés puede reajustarse cada cierto tiempo, de acuerdo con las fluctuaciones del mercado.

En este tipo de problemas se necesita calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la última cuota con la tasa anterior y luego calcular el valor de la cuota con la nueva tasa de interés y rehacer la tabla de amortización.

EJEMPLO 7.7

Una empresa obtiene un préstamo de S/. 500.000.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés de 30% anual capitalizable trimestralmente, que debe ser pagado en cuotas trimestrales por el sistema de amortización gradual.

- Calcular el valor de la cuota trimestral.
- Construir la tabla de amortización en los periodos 1 y 2.
- Si la tasa de interés se reajusta a 24% anual capitalizable trimestralmente luego del pago 16, calcular la nueva cuota trimestral y reconstruir la tabla en los periodos 17, 18, 19 y 20.

- Se calcula la renta.

$$R = \frac{500.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,075)^{-20}}{0,075}} = \text{S/. } 49.046.095,82$$

- Se construye la tabla para los periodos 1 y 2.

Periodo	Saldo insoluto	Interés	Renta	Capital pagado por cuota
1	S/. 500.000.000,00	S/. 37.500.000,00	S/. 49.046.095,82	S/. 11.546.095,82
2	S/. 488.453.904,18	S/. 36.634.042,81	S/. 49.046.095,82	S/. 12.412.053,01

- La tasa de interés se reajusta a 24% anual capitalizable trimestralmente luego del pago 16. Por consiguiente, se calcula el saldo insoluto luego del pago 16.

$$P_{16} = 49.046.095,82 \left[\frac{1 - (1 + 0,075)^{-4}}{0,075} \right] = \text{S/. } 164.271.377,15$$

Calculemos la nueva renta:

$$R = \frac{164.271.377,15}{\frac{1 - (1 + 0,06)^{-4}}{0,06}} = S/. 47.407.321,87$$

Reconstruimos la tabla con la nueva renta y la tasa de interés de 24% anual capitalizable trimestralmente:

Periodo	Saldo insoluto	Interés	Renta	Capital pagado por cuota
17	S/.164.271.377,15	S/. 9.856.282,62	S/. 47.407.321,87	S/. 37.551.039,25
18	S/.126.720.337,85	S/. 7.603.220,27	S/. 47.407.321,87	S/. 39.804.101,60
19	S/. 86.916.236,20	S/. 5.214.974,17	S/. 47.407.321,87	S/. 42.192.347,69
20	S/. 44.723.888,50	S/. 2.683.433,31	S/. 47.407.321,87	S/. 44.723.888,60

CÁLCULO DE LA RENTA CUANDO NO COINCIDE EL PERIODO DE PAGO CON EL PERIODO DE CAPITALIZACIÓN

Cuando se debe calcular la renta y el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización, o viceversa, es necesario transformar la tasa de interés o la capitalización utilizando la ecuación de equivalencia estudiada en el capítulo quinto, de manera que coincidan tanto la capitalización como el periodo de pago.

EJEMPLO 7.8

Una empresa obtiene un préstamo hipotecario de amortización gradual por un valor de S/. 90.000.000 a 5 años de plazo, a una tasa de interés de 30% anual capitalizable semestralmente, que debe pagarse en cuotas trimestrales. Calcular el valor de la cuota trimestral.

La pregunta previa sería: ¿A qué tasa anual capitalizable trimestralmente es equivalente una tasa de 30% anual capitalizable semestralmente?

A partir de la ecuación de equivalencia

$$(1 + 0,30/2)^2 = (1 + j/4)^4$$

$$j = 28,9522\% \text{ anual capitalizable trimestralmente}$$

Luego se calcula la renta:

$$i = 0,289522/4 = 0,072381; n = (5)(12)/3 = 20$$

$$R = \frac{90.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,072381)^{-20}}{0,072381}} = S/. 8.653.213,19$$



FONDOS DE AMORTIZACIÓN O DE VALOR FUTURO

“Un fondo de amortización es una cantidad que se va acumulando mediante depósitos periódicos que devengan cierto interés, de modo que en un número determinado de periodos se obtenga un monto prefijado”⁵.

Los fondos de amortización son depósitos periódicos que ganan interés con la finalidad de acumular un determinado capital; este sistema se utiliza para reposición de activos fijos, crear fondos de reserva, pagar prestaciones futuras, seguros, etc.

Las cuotas para constituir un fondo de amortización pueden calcularse mediante la fórmula del monto de una anualidad, puesto que la fecha focal que se toma como referencia es el término de la anualidad, fecha en la que se debe completar el capital o cantidad prefijada.

Al igual que en la amortización gradual, se puede elaborar la tabla de fondo de amortización o tabla de valor futuro, en la que los depósitos o cuotas ganan interés.

EJEMPLO 7.9

Una empresa desea acumular un capital de S/. 6.000.000 en tres años mediante depósitos semestrales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 14% capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de fondo de amortización correspondiente.

Solución

Se calcula la cuota.

$$S = \text{S/. } 6.000.000; n = (3)(2) = 6; i = 0,14/2 = 0,07;$$

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$R = \frac{6.000.000}{\frac{(1+0,07)^6 - 1}{0,07}} = \frac{6.000.000}{7,153291} = \text{S/. } 838.774,77$$

5. *Ibid.*, p.183.

Luego se elabora la tabla:

Tabla de fondo de amortización o de valor futuro

Periodo	Depósito o renta	Aumento de interés	Total añadido al fondo	Fondo acumulado
1	S/. 838.774,77		S/. 838.774,77	S/. 838.774,77
2	S/. 838.774,77	S/. 58.714,23	S/. 897.489,00	S/. 1.736.263,77
3	S/. 838.774,77	S/. 121.538,46	S/. 960.313,23	S/. 2.696.577,00
4	S/. 838.774,77	S/. 188.760,38	S/. 1.027.535,15	S/. 3.724.112,15
5	S/. 838.774,77	S/. 260.687,85	S/. 1.099.462,61	S/. 4.823.574,76
6	S/. 838.774,77	S/. 337.650,47	S/. 1.176.425,24	S/. 6.000.000,00
Total	S/. 5.032.648,62	S/. 967.351,39	S/. 6.000.000,00	

Forma de cálculo

En el primer periodo solamente se registra el valor de la renta. En el segundo periodo se consideran los intereses generados por la primera renta:

$$I = (838.774,80)(0,07) = S/. 58.714,23$$

Se suman los intereses más la renta y se tiene

$$\text{Total añadido al fondo} = 58.714,23 + 838.774,77 = S/. 897.489$$

El fondo acumulado al final del periodo se obtiene sumando el total añadido al fondo más el fondo acumulado del periodo anterior:

$$\text{Fondo acumulado al final del periodo} =$$

$$897.489 + 838.774,77 = S/. 1.736.263,77$$

y así sucesivamente hasta el último depósito o renta con el cual se acumula el monto de S/. 6.000.000.

EL SALDO INSOLUTO EN FONDOS DE AMORTIZACIÓN

En los fondos de valor futuro también se puede calcular el denominado saldo insoluto, que en este caso es lo que queda por acumular para conseguir el monto prefijado, sin tener que elaborar toda la tabla. Para el efecto se utiliza la siguiente ecuación:

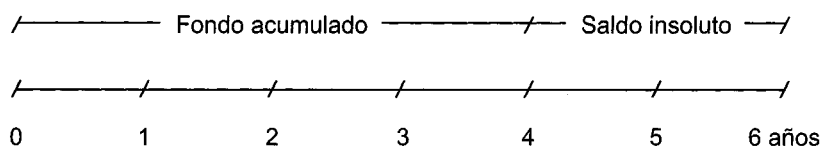
$$\text{Saldo insoluto} = \text{Monto} - \text{valor acumulado}$$

$$\text{Saldo insoluto} = \text{Monto} - R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

donde m es el número de depósitos o rentas.

EJEMPLO 7.10

En el ejemplo anterior se pide calcular el valor acumulado y el saldo insoluto en el cuarto periodo.



$$S.I. = 6.000.000 - 838.774,77 \left[\frac{(1 + 0,07)^4 - 1}{0,07} \right]$$

$$S.I. = 6.000.000 - 3.724.112,30$$

$$S.I. = S/. 2.275.887,70$$

EJEMPLO 7.11

Una empresa requiere constituir un fondo de amortización de S/. 500.000.000 mediante depósitos trimestrales durante 4 años, con el propósito de reemplazar cierta maquinaria. Si se considera una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuál será el valor acumulado inmediatamente después de haber hecho el depósito 12?

Solución

Primero se calcula la renta o depósito trimestral.

$$n = (4)(12)/3 = 16 \quad i = 0,15/4 = 0,0375$$

$$R = \frac{500.000.000}{\frac{(1 + 0,0375)^{16} - 1}{0,0375}} = S/. 23.372.413,48$$

Luego, el valor acumulado en el periodo 12.

$$S = 23.372.413,48 \left[\frac{(1 + 0,0375)^{12} - 1}{0,0375} \right] = S/. 346.194.888,03$$

Por último, el saldo insoluto inmediatamente después del periodo 12.

$$S.I. = 500.000.000 - 346.194.888 = S/. 153.805.111,97$$

EJEMPLO 7.12

La empresa XX desea constituir un fondo de amortización de S/. 3.000.000 en 3 años mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Si se considera una tasa de interés de 20% anual capitalizable semestralmente, hallar el valor del depósito semestral y elaborar la tabla del fondo de amortización correspondiente.

Solución

Se calcula el valor del depósito semestral.

$$i = \frac{0,20}{2} = 0,10 \quad n = (3)(2) = 6$$

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{3.000.000}{\frac{(1+0,10)^6 - 1}{0,10}}$$

$$R = \frac{3.000.000}{7,71561} = 388.822,14 \text{ cada semestre.}$$

Tabla de fondos de amortización

Periodo	Aumento de interés	Depósito	Incremento al fondo	Importe del fondo
1	S/. —	S/. 388.822,14	S/. 388.822,14	S/. 388.822,14
2	S/. 38.882,21	S/. 388.822,14	S/. 427.704,35	S/. 816.526,49
3.	S/. 81.652,65	S/. 388.822,14	S/. 470.474,79	S/. 1.287.001,30
4	S/. 128.700,13	S/. 388.822,14	S/. 517.522,27	S/. 1.804.523,60
5	S/. 180.452,36	S/. 388.822,14	S/. 569.274,50	S/. 2.373.798,10
6	S/. 237.379,81	S/. 388.822,14	S/. 626.201,95	S/. 3.000.000,00
Total	S/. 667.067,16	S/. 2.332.932,84	S/. 3.000.000,00	

LA UNIDAD DE VALOR CONSTANTE (UVC)

La unidad de valor constante (UVC) es un instrumento financiero que sirve como referencia para mantener el valor del dinero. Las obligaciones de dinero activas y pasivas expresadas en UVC deben tener un plazo mínimo de 365 días; es decir, es un instrumento financiero a largo plazo. La UVC tiene un valor inicial (puede ser S/. 10.000) que se puede ajustar diariamente, de acuerdo con la inflación (generalmente con la variación mensual del índice de precios al consumidor).

Si tenemos una UVC de S/. 10.000 y la inflación mensual es de 2%, el valor de la UVC será:

$$UVC = 10.000(1 + 0,02) = S/. 10.200$$

La UVC protege el ahorro y facilita el endeudamiento a largo plazo pues la persona que se endeuda en UVC, por una determinada cantidad, paga su deuda en UVC al valor que esté en el día de pago.

Cálculo del ajuste de la UVC

El valor de la UVC puede calcularse a la fecha que se desee, de acuerdo con el sistema de cálculo que se utilice. Al utilizar la fórmula siguiente, aprobada por la autoridad financiera y monetaria competente, que en este caso es la Junta Monetaria (Resolución 850-93 de 8 de julio de 1993), se tiene:

$$V_f = V_u [IPC_{n-1} / IPC_{n-2}]^{df/dm}$$

En donde:

V_f = valor de la UVC de la fecha actual

V_u = valor de la UVC del último día del mes anterior

IPC_{n-1} = índice de precios al consumidor correspondiente al mes inmediatamente anterior

IPC_{n-2} = índice de precios al consumidor correspondiente al mes previo al anterior

df = día del mes para el que se calcula el valor de la UVC

dm = número de días calendario del mes.

EJEMPLO 7.13

Calcular el valor de una UVC el día 26 de mayo de 1997, si se conocen los siguientes datos:

- a) Valor de la UVC el 30 de abril: S/. 20.000
- b) Índice de precios al consumidor en el mes de abril: 15,25
- c) Índice de precios al consumidor en el mes de marzo: 15,00
- d) Número de días del mes de mayo: 31

$$V_f = 20.000 \left[\frac{15,15}{15,00} \right]^{26/31} = \text{S/. } 20.279,20$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de la cuota anual necesaria para amortizar una deuda de S/. 3.000.000 en 6 años, considerando una tasa de interés de 12% anual.

Respuesta

S/. 729.677,15

2. Calcular el valor de la cuota trimestral necesaria para amortizar una deuda de S/. 7.000.000 en 8 años, considerando una tasa de interés anual de 15% capitalizable trimestralmente.

Respuesta

S/. 379.269,17

3. Una empresa consiguió un préstamo de S/. 6.000.000, amortizable en pagos semestrales iguales en 4 años, con una tasa de interés de 9% anual capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

Respuesta

S/. 909.657,93

4. Una empresa obtiene un préstamo de 98.000.000 a 7 años de plazo, que debe ser pagado en cuotas trimestrales con una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente. Calcular la renta y el saldo insoluto inmediatamente después de pagar la cuota 20.

Respuestas

Renta = S/. 6.225.038,90; Saldo insoluto = S/. 41.059.647,35

5. La empresa Riko obtiene un préstamo de S/. 10.000.000 a 10 años de plazo para amortizarlo mediante pagos semestrales; el primero de los cuales debe hacerlo luego de haber transcurrido 6 meses. Si se considera una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente, calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la cuota 12.

Respuesta

Saldo insoluto = S/. 5.636.483,40

6. En el problema anterior calcular la distribución de la cuota 13 en intereses y capital pagado por cuota y reconstruir la tabla de amortización en los periodos 13 y 14.

Respuestas

Intereses = S/. 394.553,84; Capital pagado por cuota = S/. 549.375,43

7. Una persona adquiere una casa por un valor de S/. 1.200.000 mediante el sistema de amortización gradual. Si hipoteca la propiedad a una institución financiera a 25 años de plazo, pagaderos en cuotas mensuales iguales, a una tasa de interés de 12% anual capitalizable mensualmente, calcular el valor de la cuota mensual y los derechos del acreedor y del deudor luego de haber pagado la cuota 200.

Respuestas

Cuota mensual = S/. 12.638,69; Derechos del acreedor = S/. 796.602,00;
Derechos del deudor = S/. 403.397,51

8. Anita adquiere una casa mediante el sistema de amortización gradual e hipoteca la propiedad a una institución financiera por un valor de S/. 1.000.000 a 30 años de plazo, pagadero en cuotas mensuales con un interés de 10% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de la cuota mensual y cuánto le queda por pagar luego de la cuota 300.

Respuestas

Cuota mensual = S/. 8.775,68; Saldo por pagar = S/. 413.031,00

9. Una empresa obtiene un préstamo de S/. 190.000.000 a 4 años de plazo con una tasa de interés de 18% anual capitalizable semestralmente, que debe ser pagado en cuotas trimestrales. Calcular el valor de la cuota trimestral.



Respuesta

Valor de la cuota trimestral = S/. 16.794.333,18

10. Una empresa obtiene un préstamo de S/. 265.000.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente, que debe ser pagado en cuotas bimestrales. Calcular el valor de la cuota bimestral.

Respuesta

Valor de la cuota bimestral = S/. 15.399.492,11

11. Calcular el valor del depósito anual necesario para acumular S/. 2.000.000 en 4 años, considerando una tasa de interés de 13% anual; elaborar la tabla de fondo de valor futuro correspondiente.

Respuesta

S/. 412.388,39

12. Calcular el valor del depósito trimestral necesario para acumular S/. 3.500.000 en 3 años a una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente y elaborar la tabla de valor futuro correspondiente.

Respuesta

S/. 236.293,07

13. La empresa XYZ desea constituir un fondo de S/. 4.000.000 para reposición de una maquinaria al cabo de 5 años. Calcular el valor del depósito anual que debe realizar, si se considera una tasa de interés de 14% anual, y elaborar la tabla del fondo de amortización o de valor futuro correspondiente.

Respuesta

S/. 605.134,19

14. Una empresa desea acumular un capital de S/. 7.000.000 en 4 años, mediante depósitos semestrales iguales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 15% anual, capitalizable semestralmente. Calcular el valor del depósito semestral, el valor acumulado y el saldo insoluto al final del periodo 6.

Respuestas

Valor del depósito = S/. 670.089,18; Valor acumulado = S/. 4.854.139,40;

Saldo insoluto = S/. 2.145.860,60

15. La empresa Arme consigue un préstamo de S/. 12.000.000 a 10 años de plazo, incluidos 2 años de gracia, con una tasa de interés de 9% anual capitalizable semestralmente y una comisión de compromiso de 2% anual capitalizable semestralmente

sobre saldos deudores. Calcular el valor de la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización gradual correspondiente.

Respuesta

S/. 1.146.990,50 incluido el 2% de comisión

16. Una persona desea comprar una moto por un valor de S/. 18.000.000 a 3 años de plazo con una tasa de interés de 2% mensual, que deben pagarse en cuotas mensuales fijas. Calcular el valor de la cuota fija mensual por las tres alternativas que le ofrecen y seleccionar la más baja:
- Por acumulación de intereses o método lagarto.
 - Sobre saldos deudores.
 - Por amortización gradual.

Respuestas

a) S/. 860.000 b) S/. 685.000, que es la más baja c) S/. 706.191,35

17. Una persona obtiene un préstamo de S/. 30.000.000 a 3 años de plazo con una tasa de interés de 30% anual, capitalizable mensualmente, que se reajusta luego del primer año a 24% anual capitalizable mensualmente. Calcular la cuota original y la cuota con el reajuste.

Respuestas

Renta original = S/. 1.273.547,30; Nueva renta = S/. 1.204.264,83

18. En el problema anterior, construir la tabla de amortización gradual en los primeros 12 periodos.
19. En el problema 17, reconstruir la tabla de amortización en los periodos 13, 14 y 15 con la nueva renta y la nueva tasa de interés.
20. En el problema 17, calcular una nueva renta tomando en cuenta el primer reajuste, luego de pagar la cuota número 24, a una tasa de interés reajustada de 27% anual capitalizable mensualmente y reconstruir la tabla hasta la cuota 36.

Respuestas

Renta reajustada: S/. 1.186.109,216
(el saldo insoluto luego del pago 24 es S/. 12.353.065,14)

AUTOEVALUACIÓN

- Calcular el valor de la cuota semestral necesaria para amortizar una deuda de S/. 50.000.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés de 22% anual capitalizable semestralmente.

2. Calcular el valor de la cuota mensual necesaria para amortizar una deuda de S/. 15.000.000 en 6 años, considerando una tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente.
3. Una empresa obtiene un préstamo de S/. 380.000.000 para amortizarlo en cuotas trimestrales a 10 años de plazo, con una tasa de interés de 24% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el saldo insoluto luego de pagar la cuota 10.
4. En el problema anterior, reconstruir la tabla de amortización gradual en el periodo 11.
5. Federico adquiere una casa por un valor de S/. 95.000.000 mediante un préstamo, e hipoteca la propiedad a una institución financiera que utiliza el sistema de amortización gradual, a 15 años de plazo, con una tasa de interés de 21% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de la cuota mensual y los derechos del acreedor y del deudor luego del pago 60.
6. Francisco desea adquirir un auto a crédito, por un valor de S/. 36.000.000 a 3 años de plazo, que debe ser pagado en cuotas fijas mensuales con una tasa de interés de 3% mensual. ¿Cuál de las siguientes alternativas le conviene para comprar el auto?
 - a) Por el método de acumulación de intereses o método "lagarto".
 - b) Por el método de saldos deudores.
 - c) Por el método de amortización gradual.
7. Una empresa obtiene un préstamo por S/. 600.000.000 a 5 años de plazo con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente; los pagos son trimestrales. Calcular el valor del pago trimestral.
8. Una persona obtiene un préstamo de S/. 20.000.000 a 3 años de plazo y una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente, la cual se reajusta luego de los primeros 12 meses a 21% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de la renta o pago mensual original y la renta o pago después del reajuste.
9. Una empresa requiere constituir un fondo de valor futuro para reposición de equipos por un valor de S/. 750.000.000 durante 10 años, en que se estima la vida útil de dichos equipos, mediante depósitos trimestrales con una tasa de interés de 21% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor del depósito trimestral.
10. Cierta empresa requiere acumular un fondo de S/. 75.000.000 durante 5 años mediante depósitos semestrales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 27% anual capitalizable semestralmente. Calcular el valor del depósito semestral, el valor acumulado luego del depósito número 4 y el saldo insoluto luego del depósito.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. $i = 0,22/2 = 0,11$ $n = (5)(12)/6 = 10$

$$R = \frac{50.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,11)^{-10}}{0,11}} = S/. 8.490.071,355$$

Respuesta

S/. 8.490.071,355

2. $i = 0,18/12 = 0,015$ $n = (12)(6) = 72$

$$R = \frac{15.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,015)^{-72}}{0,015}} = S/. 342.116,87$$

Respuesta

S/. 342.116,87

3. Primero se calcula la renta:

$i = 0,24/4 = 0,06$ $n = (10)(12)/3 = 40$

$$R = \frac{380.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,06)^{-40}}{0,06}} = S/. 25.255.383,65$$

El saldo insoluto (P) luego del pago 10 se calcula utilizando la fórmula del saldo insoluto.

$n = 40$ $m = 10$ $k = 40 - 10 = 30$

$$P_{10} = 25.255.383,65 = \left[\frac{1 - (1 + 0,06)^{-30}}{0,06} \right] = S/. 347.636.091,6$$

Respuesta

S/. 347.636.091,6

4. Se toma el saldo insoluto luego del pago 10, que es el mismo valor al inicio del periodo 11, y se procede a reconstruir la tabla.

Saldo insoluto al inicio del periodo 11 = S/. 347.636.091,6

Interés = $347.636.091,6 (0,06) = S/. 20.858.165,50$

Cuota o renta = S/. 25.255.383,65

Capital pagado por cuota = $25.255.383,65 - 20.858.165,50 = S/. 4.397.218,154$

Saldo deuda = $347.636.091,6 - 4.397.218,154 = S/. 343.238.873,40$

Periodo	Saldo insoluto	Intereses	Cuota o renta	Capital pagado	Saldo deuda
11	S/. 347.636.091,6	S/. 20.858.165,5	S/. 25.255.383,65	S/. 4.397.218,54	S/. 343.238.873,40

5. Se calcula la renta.

$$i = 0,21/12 = 0,0175 \quad n = (15)(12) = 180$$

$$R = \frac{95.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,0175)^{-180}}{0,0175}} = S/. 1.739.081,656$$

Se calcula el saldo insoluto luego del pago 60.

$$k = 180 - 60 = 120$$

$$P_{60} = 1.739.081,656 \left[\frac{1 - (1 + 0,0175)^{-120}}{0,0175} \right] = S/. 86.983.798,64$$

Por definición, el saldo insoluto constituye los derechos del acreedor.

Al emplear la ecuación

Derechos del acreedor + Derechos del deudor = Deuda original

Entonces

$$\text{Derechos del deudor} = 95.000.000 - 86.983.798,64 = 8.016.201,36$$

Respuestas

$$\text{Renta} = 1.739.081,656; \text{DA} = 86.983.798,64; \text{DD} = 8.016.201,36$$

6. Se calcula la cuota fija durante los 36 meses, mediante cada uno de los citados métodos.

- a) Este método acumula los intereses; por tanto, utiliza la fórmula del monto en interés simple.

$$M = 36.000.000 [1 + 0,03(36)] = S/. 74.880.000$$

$$\text{Cuota fija} = 74.880.000/36 = S/. 2.080.000$$

- b) Este método calcula la cuota mensual sobre saldos.

$$\text{Primera cuota } S/. 2.080.000$$

$$\text{Cuota de capital} = 36.000.000/36 = S/. 1.000.000$$

$$\text{Última cuota} = 1.000.000 + 1.000.000(0,03) = S/. 1.030.000$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{a + u}{2}$$

$$\text{Cuota fija} = \frac{2.080.000 + 1.030.000}{2} = S/. 1.555.000$$

- c) Este método utiliza las amortizaciones graduales, con la fórmula de la renta en función del valor actual de una anualidad.

$$i = 0,03 \quad n = 36$$

$$R = \frac{36.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,03)^{-36}}{0,03}} = S/. 1.648.936,59$$

Respuesta

Le conviene el método de saldos deudores, pues le da una cuota de S/. 1.555.000. Le sigue en prioridad el método de amortización gradual: S/. 1.648.936,59.

7. Como el periodo de pago es diferente del periodo de capitalización de los intereses, se requiere utilizar la ecuación de equivalencia.

$$(1 + j/4)^4 = (1 + 0,24/12)^{12}$$

$$j = 24,4832\% \text{ anual capitalizable trimestralmente}$$

Es decir, una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente equivale a una tasa de 24,4832% anual capitalizable trimestralmente.

Entonces se puede calcular la renta:

$$i = 0,244832/4 = 0,061208 \quad n = (5)(12)/3 = 20$$

$$R = \frac{600.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,0612)^{-20}}{0,0612}} = \text{S/. } 52.821.476,93$$

Respuesta

$$R = \text{S/. } 52.821.476,93$$

8. Renta original

$$i = 0,24/12 = 0,02 \quad n = (3)(12) = 36$$

$$R = \frac{20.000.000}{\frac{1 - (1 + 0,02)^{-36}}{0,02}} = \text{S/. } 784.657,05$$

Nueva renta

Se calcula el saldo insoluto luego del pago 12

$$k = 36 - 12 = 24$$

$$P_{12} = 784.657,05 \left[\frac{1 - (1 + 0,02)^{-24}}{0,02} \right] = \text{S/. } 14.840.945,06$$

$$i = 0,21/12 = 0,0175 \quad n = 24$$

$$R = \frac{14.840.945,06}{\frac{1 - (1 + 0,0175)^{-24}}{0,0175}} = \text{S/. } 762.611,62$$

Respuestas

Renta original S/. 784.657,05; Nueva renta S/. 762.611,62

9. $i = 0,21/4 = 0,0525 \quad n = (10)(12)/3 = 40$

$$R = \frac{750.000.000}{\frac{(1 + 0,0525)^{40} - 1}{0,0525}} = \text{S/. } 5.839.776,222$$

Respuesta

S/. 5.839.776,222 cada trimestre.

$$10. \quad i = 0,27/2 = 0,135 \quad n = (5)(12)/6 = 10$$

$$R = \frac{75.000.000}{\frac{(1 + 0,135)^{10} - 1}{0,135}} = S/. 3.974.023,35$$

Fondo acumulado luego del depósito 4

$$S = 3.974.023,35 \left[\frac{(1 + 0,135)^4 - 1}{0,135} \right] = S/. 19.414.536,20$$

Saldo insoluto

$$75.000.000 - 19.414.536,20 = 55.585.463,80$$

Respuestas

Renta = S/. 3.974.023,35; Fondo acumulado = S/. 19.414.536,20;

Saldo insoluto = S/. 55.585.463,80

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿En qué consiste la amortización gradual?
2. ¿Qué es una tabla de amortización gradual?
3. ¿Cómo se calcula la renta o pago periódico para amortizar una deuda?
4. ¿Qué es el saldo insoluto?
5. ¿Cómo se calcula el saldo insoluto de una deuda?
6. ¿En qué consisten los derechos del acreedor y el deudor? ¿Cómo se pueden calcular?
7. ¿Cómo se puede calcular la nueva renta cuando existe un reajuste en la tasa de interés?
8. ¿Qué debe hacerse cuando no coinciden el periodo de capitalización de una tasa de interés con los periodos de pago?
9. ¿Cómo se puede calcular un fondo de valor futuro?
10. ¿En qué consiste la unidad de valor constante? ¿Para qué se utiliza?

Capítulo

8

DOCUMENTOS FINANCIEROS

Justificación

Objetivo general

Objetivos específicos

Conducta de entrada

Respuestas a la conducta de entrada

Sistema financiero

Mercado de valores

Principales documentos financieros

Precio de los documentos financieros

Bonos

Características

Fórmula para calcular el precio de un bono

Precio de un bono comparado entre fechas de pago de intereses

Interés redituable de un bono

Rendimiento de un bono

Bonos cupón cero

Seguros

Tasa de interés real

Tasas de interés internacionales

Valor actual neto (VAN)

Tasa interna de retorno

Ejercicios y problemas propuestos

Autoevaluación

Respuestas a la autoevaluación

Actividades de repaso

JUSTIFICACIÓN

En este capítulo se estudiarán los siguientes temas:

- El sistema financiero ecuatoriano, las principales normas e instituciones que lo conforman.
- Los principales documentos financieros: de renta fija y de renta variable.
- Los bonos: concepto y precio.
- Los seguros.
- Las tasas de interés reales.
- El valor actual neto y la tasa interna de retorno.

Dichos temas serán tratados de modo muy elemental pero básico, puesto que constituyen un conjunto de conocimientos que complementan lo explicado en los capítulos anteriores y dan una orientación real del área de aplicación de las matemáticas financieras.

OBJETIVO GENERAL

Obtener conocimiento sobre el sistema financiero, sus normas e instituciones, los documentos financieros, los bonos, seguros y tasas de interés especiales como una aplicación de las matemáticas financieras.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✍ Conocer el sistema financiero, sus principales normas y las instituciones que lo integran.
- ✍ Conocer los principales documentos financieros que se manejan en el sistema financiero.
- ✍ Conocer el concepto de bonos y calcular el precio de éstos.
- ✍ Conocer en qué consisten los seguros.
- ✍ Conocer el concepto de tasa de interés real.
- ✍ Conocer los conceptos de valor actual neto y tasa interna de retorno.

CONDUCTA DE ENTRADA

1. ¿Qué es un sistema?
2. ¿Qué es una norma o ley y para qué sirve?
3. ¿Qué es una institución financiera?
4. ¿En qué se diferencia una institución financiera de una monetaria?
5. ¿En qué se diferencia una institución financiera pública de una privada?
6. ¿Qué es un documento financiero?
7. ¿En qué se diferencia una tasa de interés de una tasa de rendimiento?
8. ¿En qué consiste el valor actual de un documento financiero?
9. ¿Qué significa valor actual en el tiempo cero?
10. ¿Qué significa calcular el precio de un documento financiero?

RESPUESTAS A LA CONDUCTA DE ENTRADA

1. Sistema, según el *Gran diccionario enciclopédico universal* (Editorial Alfredo Ortells), es “un conjunto de reglas o principios enlazados entre sí”. “Conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí, contribuyen a un determinado objeto”.
2. Una norma o una ley, según el mismo diccionario, es “una regla que se debe seguir o a la que deben ajustarse nuestros actos”.
3. Una institución financiera es una persona jurídica que tiene como finalidad el manejo de dinero o valores monetarios mediante la modalidad de captación de terceras personas, proporcionar créditos, cobrar por sus servicios y reconocer el pago de intereses.
4. Una institución financiera se diferencia de una monetaria en que sólo esta última tiene la facultad para emitir dinero.
5. Una institución financiera pública se diferencia de una privada en que esta última busca el lucro además de prestar un servicio; en cambio la pública busca el servicio y generalmente controla o regula la actividad financiera.

6. Un documento financiero es un papel que representa un valor en dinero; generalmente tiene un beneficiario, un valor nominal, una tasa de interés nominal, puede descontarse o negociarse, y tiene el respaldo de una institución financiera.
7. Tasa de interés es la que generalmente consta en el documento financiero y tasa de rendimiento es aquella que se negocia entre las partes, comprador y vendedor.
8. Valor actual de un documento financiero es aquel calculado antes del vencimiento de un documento, a una tasa de interés, de descuento o rendimiento.
9. Valor actual en el tiempo cero significa calcular el valor de un documento financiero en la fecha de suscripción cuando se conoce la fecha de vencimiento, su valor al vencimiento y la tasa de interés a la que se descuenta o calcula.
10. Calcular el precio de un documento financiero significa estimar su valor actual en una determinada fecha antes del vencimiento, con una tasa de interés de descuento o de rendimiento. Este precio puede negociarse a la par, con castigo o con premio, dependiendo de si la tasa con que se negocie es igual, mayor o menor que la tasa nominal del documento.

SISTEMA FINANCIERO

Sistema financiero es un conjunto de instituciones interrelacionadas e interdependientes que regulan y operan las actividades financieras mediante leyes o normas en un país o región geográfica.

Las instituciones que conforman el sistema financiero recogen los excedentes financieros, los ahorros, y los canalizan hacia aquellas personas que los requieren o necesitan.

El conjunto de normas o leyes constituyen disposiciones que regulan las actividades de las personas naturales y jurídicas dedicadas a las actividades financieras, como captación, manejo del dinero, inversiones, préstamos, ahorros, compraventa de valores o documentos financieros, manejo de las tasas de Interés, etc.

A continuación se citan algunos ejemplos de estas normas:

- a) La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, que regula las actividades de las instituciones financieras, como los bancos, las sociedades financieras, las cooperativas de ahorro y crédito, las mutualistas, compañías de arrendamiento mercantil, compañías emisoras o administradoras de tarjetas de crédito, etc.
- b) Ley del Mercado de Valores, que regula la operación de un mercado de valores organizado, integrado, eficaz y transparente. Abarca el mercado bursátil y extrabursátil, el Consejo Nacional de Valores, las casas de valores, las administradoras de fondos de inversión, los agentes de bolsa y otros.

- c) Ley de Régimen Monetario, que regula la emisión de moneda y la paridad cambiaria, las tasas de interés, los términos de intercambio, la inflación, etc.
- d) Otras leyes, como la Ley de Compañías, la Ley de Empresas Aseguradoras, el Código Civil, el Código Tributario.

El segundo elemento del sistema financiero lo forman instituciones que podemos agrupar de la siguiente manera:

Monetarias

Son aquellas instituciones públicas que tienen la facultad de emitir dinero, con el respectivo respaldo en oro, divisas u otro medio de pago. Por ejemplo, el Banco Central, el Banco de la Moneda, la Junta Monetaria u otro organismo similar.

De control

Son aquellas instituciones públicas que, respaldadas en la respectiva ley, tienen facultad para controlar y sancionar a aquellas personas naturales o jurídicas que incumplan la ley. Además deben orientar y regular las actividades financieras. Por ejemplo, la Superintendencia de Bancos, la Superintendencia de Compañías, la Junta Bancaria y el Consejo Nacional de Valores, entre otros.

Entidades bancarias

Son aquellas entidades públicas o privadas encargadas de manejar dinero o valores y otorgar créditos. Por ejemplo, entre las entidades bancarias públicas: Banco Nacional de Fomento, Banco de la Vivienda, Corporación Financiera Nacional, Instituto de Crédito Educativo, Banco de Desarrollo, entre otros, cuya finalidad es impulsar los procesos de desarrollo mediante líneas de crédito, especialmente a los sectores de la población con menores ingresos.

Entre las entidades bancarias privadas están los ejemplos de los bancos privados de diferente tipo, con alcance geográfico local, nacional e internacional, que son intermediarios en el mercado financiero, captan recursos del público —mediante depósitos— y a la vez realizan operaciones de crédito o inversión con dichos recursos.

Otras entidades financieras

De acuerdo con la respectiva ley (en este caso tomamos lo establecido en la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, de 12 de mayo de 1994), algunas de ellas son:

- Servicios financieros: almacenes generales de depósito, compañías de arrendamiento mercantil (*leasing*), compañías emisoras o administradoras de tarjetas de crédito, casas de cambio, corporaciones de garantía y retrogarantía, compañías de titularización.
- Servicios auxiliares: transporte de especies monetarias y de valores, servicios de cobranzas, cajeros automáticos, servicios contables y de computación, fomento a las exportaciones y otras.

MERCADO DE VALORES

El mercado de valores abarca el mercado bursátil y el extrabursátil y las respectivas instituciones públicas y privadas que lo controlan y operan, como el Consejo Nacional de Valores, las bolsas de valores, las administradoras de fondos de inversión, los agentes de bolsa y los usuarios e inversionistas. Es decir, la administración y negociación de documentos financieros de renta variable y de renta fija, como acciones —en el caso de renta variable— y, en el caso de renta fija: pagarés, letras de cambio, bonos, cédulas hipotecarias, certificados de tesorería, obligaciones de entidades públicas y del sector privado, aceptaciones bancarias, avales, cartas de crédito, cupones, pólizas y otros.

El mercado bursátil lo integran todos los valores o documentos financieros inscritos en las bolsas de valores. En cambio, el mercado extrabursátil lo integran aquellos valores o documentos financieros no inscritos en las bolsas de valores.

PRINCIPALES DOCUMENTOS FINANCIEROS

Como se enunció anteriormente, existen documentos de renta fija (a corto y largo plazo) y de renta variable en el mercado de valores.

Los documentos de renta fija poseen las características siguientes:

- Tienen un valor nominal que consta en el documento
- Algunos tienen una tasa de interés nominal que igualmente consta en el documento original
- Tienen una fecha de suscripción y otra de vencimiento
- Pueden negociarse libremente con una tasa de descuento o con una tasa de rendimiento
- Pueden ser emitidos por el sector público o el privado
- Pueden ser emitidos a corto o a largo plazo y se pueden negociar a la par, con premio o con castigo
- Algunos de estos documentos tienen cupones desprendibles en los que constan los intereses que se deben pagar o cobrar por periodo

Los documentos de renta fija pueden clasificarse en:

Papeles con descuento: su rendimiento está determinado por el descuento sobre el valor nominal que tienen en el momento de su adquisición:

- Bonos de estabilización monetaria (Bems)
- Bonos de estabilización de divisas
- Certificados de abono tributario
- Letras de cambio, pagarés, notas de crédito, aceptaciones bancarias.

A corto plazo (vencimiento entre 1 y 360 días):

- Pólizas de acumulación
- Certificados financieros

- Certificados de inversión
- Bonos del Tesoro o certificados de tesorería
- Otras obligaciones.

A largo plazo (vencimiento mayor de 360 días):

- Cédulas hipotecarias
- Bonos de prenda
- Bonos de garantía
- Títulos hipotecarios
- Bonos del Estado
- Bonos dólares
- Bonos de gobiernos seccionales (municipales y provinciales).
- Bonos de estabilización de la deuda externa.

Los documentos de renta variable son títulos con rendimiento variable; el principal documento es la *acción*, que representa una parte del total en que está dividido el capital social o patrimonio de una empresa. Sus principales características son:

- Un valor nominal impreso en la acción; casi siempre es un múltiplo de 10
- Constituyen parte del capital social de la empresa
- Se emiten cuando se constituye una empresa o cuando se realizan aumentos de capital de una empresa
- Generan rendimiento que proviene de las utilidades de la empresa; este rendimiento se conoce como dividendo
- Pueden negociarse con un precio o valor mayor o menor a su valor nominal
- El beneficio o renta que proporcionan varía en función de los resultados positivos o negativos de la gestión empresarial

PRECIO DE LOS DOCUMENTOS FINANCIEROS

Los documentos financieros de renta fija o de renta variable pueden negociarse en el mercado bursátil, o en el extrabursátil, de acuerdo con la oferta y demanda, las tasas de interés, el rendimiento y determinadas condiciones especiales.

EJEMPLO 8.1

Calcular el precio y el rendimiento de un pagaré cuyo valor nominal es S/. 5.000.000, suscrito el 12 de marzo con vencimiento en 90 días, si se negocia el 11 de abril del mismo año a una tasa de descuento de 24% anual.

Solución

Puesto que en las condiciones del problema, el pagaré no reconoce una tasa de interés desde la suscripción, se entiende que los S/. 5.000.000 son al vencimiento; por tanto, se puede calcular el precio:

$$\text{Precio} = \text{Valor efectivo} = C_b = M(1 - dt)$$

$$\text{Precio} = 5.000.000[1 - 0,24(60/360)] = \text{S/. } 4.800.000$$



Es decir, su precio equivale a 96% del valor nominal.

Para calcular el rendimiento de este documento se toma la fórmula genérica del rendimiento, que se encuentra en *La Guía del Inversionista Bursátil*, publicada por la Bolsa de Valores de Quito.

$$\text{Rendimiento} = \left[\frac{100 - \text{precio}}{\text{precio}} \right] \left[\frac{360}{\text{No. de días}} \right] [100]$$

$$\text{Rendimiento} = \left[\frac{100 - 96}{96} \right] \left[\frac{360}{60} \right] [100] = 25\%$$

Respuesta: Precio S/. 4.800.000; 96% del valor nominal.

Rendimiento: 25%

BONOS

*"Bono es una obligación o documento de crédito, emitido por un gobierno o una entidad particular a un plazo perfectamente determinado, que devenga intereses pagaderos en periodos regulares de tiempo"*¹.

"Un bono es una promesa escrita de:

- a) *Una suma fija, llamada valor de redención, en una fecha dada, llamada fecha de redención;*
- b) *Pagos periódicos llamados pagos de intereses hasta la fecha de redención"*².

El bono, según las definiciones anteriormente anotadas, es un documento financiero que se utiliza para obtener dinero actual (liquidez), con la obligación de reconocer el respectivo interés periódico con los cupones, y su valor original (nominal) en la fecha de vencimiento.

CARACTERÍSTICAS

En todo bono se pueden destacar las siguientes características:

- a) El valor nominal que consta en el documento generalmente es un múltiplo de 100. Ejemplo: 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000, etc.
- b) La tasa de interés que se debe pagar puede ser anual con capitalización semestral, trimestral, etc.; la más común es la semestral. Ejemplo: un bono al 12% pagadero en abril y octubre se puede expresar: 12% AO.
- c) La fecha de redención es el plazo de terminación o fecha en la cual debe pagarse el valor nominal del bono. Casi siempre coincide con la fecha de pago de intereses.

1. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 200.

2. Frank Ayres Jr. *Op. cit.*, p. 106.

- d) El valor de redención es el valor del bono a la fecha de finalización o redención. Este valor puede ser:
- Redimible a la par: cuando el valor nominal y el valor de redención son iguales. Por ejemplo, un bono de S/. 1.000 redimible a la par $= (1.000)(1) = \text{S/. } 1.000$.
 - Redimible con premio: cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal. Por ejemplo, un bono de S/. 1.000 redimible a 102 $= 1.000(1,02) = \text{S/. } 1.020$.
 - Redimible con descuento: cuando el valor de redención es menor que el valor nominal. Por ejemplo, un bono de S/. 1.000 redimible a 98 $= 1.000(0,98) = \text{S/. } 980$.
- e) Cupón: es la parte desprendible del bono que contiene el valor de los intereses por periodo de pago. Por ejemplo, un bono de S/. 10.000 al 12% FA, emitido el 1 de febrero de 1980 y redimible a la par el 1 de febrero del año 2010 establece los siguientes pagos: el pago de S/. 10.000 el 1 de febrero del año 2010, valor de redención $= (10.000)(1) = \text{S/. } 10.000$; sesenta cupones o pagos semestrales de $(10.000)(0,12/2) = \text{S/. } 600$ desde el 1 de agosto de 1980.
- f) Precio: es el valor que tiene un bono cuando se negocia; puede ser a la par, con premio o con castigo.
- A la par, cuando la tasa nominal del bono coincide con la tasa de negociación.
 - Con premio, cuando la tasa de negociación es menor que la tasa nominal del bono.
 - Con castigo, cuando la tasa de negociación es mayor que la tasa nominal del bono.

EJEMPLO 8.2

El 1 de junio de 1993 una persona compra un bono de S/. 100.000 a 14% JD (junio-diciembre), redimible a 101 el 1 de junio del año 2013. Calcular: a) su valor de redención, b) el número de cupones y c) el valor de cada cupón.

- a) $\text{S/. } 100.000 (1,01) = \text{S/. } 101.000$ el 1 de junio del 2013
- b) 40 cupones
- c) Valor de cada cupón:
 $(100.000)(0,07) = \text{S/. } 7.000$; el primero de ellos el 1 de diciembre de 1993.

FÓRMULA PARA CALCULAR EL PRECIO DE UN BONO

El bono, por ser un documento financiero, es perfectamente negociable y se compra o vende considerando una tasa de interés del inversionista, que es diferente de la del bono. Para calcular el precio de un bono en una fecha de pago de interés, se puede utilizar la siguiente fórmula, que combina el valor actual del bono con el valor actual de los cupones hasta el vencimiento del mismo.

Precio de un bono = valor actual del bono + valor actual de los cupones.

$$P = C(1 + i)^{-n} + \text{cupón} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

donde

P = precio del bono en la fecha de pago de intereses;

C = valor de redención del bono;

i = tasa de interés por periodo, del inversionista o de negociación;

n = número de cupones;

Cupón = valor de cada cupón.

EJEMPLO 8.3

Calcular el precio de venta de un bono de S/. 100.000 a 18% FA, el 1 de febrero de 1993, redimible a la par el 1 de febrero del 2008, si se desea un rendimiento de 17% anual capitalizable semestralmente.

$$P = C(1 + i)^{-n} + \text{cupón} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Valor de redención: $100.000(1) = \text{S/. } 100.000$

Número de cupones: 30

Valor de cada cupón: $100.000(0,18/2) = \text{S/. } 9.000$

Tasa de rendimiento o de negociación = $0,17/2 = 0,085$

$$P = 100.000(1 + 0,085)^{-30} + 9.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,085)^{-30}}{0,085} \right]$$

$$P = 8.651,83 + 9.000(10,746844)$$

$$P = \text{S/. } 105.373,43$$

Ésta es una negociación con premio para el vendedor pues vende el bono en S/. 105.373,43.

EJEMPLO 8.4

Calcular el precio de compra de un bono de S/. 1.000.000 a 11% JD, redimible a 101 el 1 de diciembre del año 2005, si se vende el 1 de diciembre de 1994 con un rendimiento de 11,5% anual capitalizable semestralmente.

Valor de redención: $1.000.000(1,01) = \text{S/. } 1.010.000$

Número de cupones: 22

Valor del cupón: $1.000.000(0,11/2) = \text{S/. } 55.000$

Tasa de rendimiento: $0,115/2 = 0,0575$

$$P = 1.010.000(1 + 0,0575)^{-22} + 55.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,0575)^{-22}}{0,0575} \right]$$

$$P = 295.224,98 + 676.928,56$$

$$P = S/. 972.153,54$$

Esta negociación es con castigo para el vendedor pues vende el bono en S/. 972.153,54.

PRECIO DE UN BONO COMPARADO ENTRE FECHAS DE PAGO DE INTERESES

Frecuentemente, la negociación de un bono se realiza en fechas diferentes de la de pago de intereses o pago de cupones. Para calcular el valor del bono en esas fechas, se realiza el siguiente procedimiento:

- a) Se halla el valor del bono en la última fecha de pago de intereses, inmediatamente antes de la fecha de compra-venta;
- b) Se calcula el interés simple del referido valor tomando en consideración los días exactos a partir de la última fecha de pago de intereses. Como procedimiento alternativo, se calcula el interés tomando el número de días comprendidos entre la fecha de negociación y la fecha futura de pago de intereses.

EJEMPLO 8.5

Calcular el precio de compra de un bono de S/. 100.000 a 13% AO, redimible a la par el 1 de abril de 1999, si se compra el 1 de junio de 1996 y se espera obtener un rendimiento de 12% capitalizable semestralmente.

Solución

$$\text{Valor de redención: } 100.000(1) = S/. 100.000$$

$$\text{Número de cupones: } 6$$

$$\text{Valor de cada cupón: } 100.000(0,13/2) = S/. 6.500$$

$$\text{Tasa de negociación: } 0,12/2 = 0,06$$

$$P = C(1+i)^{-n} + \text{cupón} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$P = 100.000(1 + 0,06)^{-6} + 6.500 \left[\frac{1 - (1 + 0,06)^{-6}}{0,06} \right]$$

$$P = 70.496,05 + 31.962,61$$

$$P = S/. 102.458,66$$

Este valor se acumula del 1 de abril al 1 de julio de 1996, a 12% capitalizable semestralmente, utilizando la fórmula del monto a interés simple:

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 102.458,66[1 + 0,12(91/360)] = S/. 105.566,58$$

El precio del bono es S/. 105.566,58, que es el denominado "bono sucio".

INTERÉS REDITUABLE DE UN BONO

El interés redituable de un bono es una parte fraccionaria del pago de intereses en una fecha diferente del pago de cupones. Se obtiene dividiendo el número de días, contados desde la última fecha de pago de un cupón hasta la fecha de compra, entre el número de días del periodo de capitalización de intereses y multiplicando por los intereses del periodo completo.

El interés redituable se utiliza para obtener el denominado "bono limpio".

En el ejemplo anterior:

$P = S/. 102.458,66$, en la fecha de pago del cupón

$P_1 = S/. 105.566,58$, precio del bono sucio

Número de días desde la fecha de pago de interés: 91

Capitalización semestral: 180 días

Intereses: $(100.000)[0,13(180/360)] = S/. 6.500$

$$\text{Interés redituable} = \frac{91}{180} (6.500) = S/. 3.286,11$$

El interés redituable sirve para calcular:

- a) El precio del bono limpio: Precio del bono sucio – Interés redituable
 $105.566,58 - 3.286,11 = S/. 102.280,47$
- b) El precio neto o precio con interés: Precio del bono sucio + Interés redituable
 $105.566,58 + 3.286,11 = S/. 108.852,69$
 El más utilizado es el precio del bono limpio.

RENDIMIENTO DE UN BONO

Como se expresó, al explicar el precio de un bono en forma conceptual, el rendimiento de un bono está dado en función de la tasa de negociación que acuerden las partes: vendedor y comprador. Por tanto, existe un rendimiento con premio cuando se negocia un bono a una tasa menor que la nominal del bono; existe un rendimiento a la par cuando se negocia un bono con una tasa igual a la nominal del bono; existe un rendimiento con castigo cuando se negocia un bono con una tasa mayor que la nominal del bono.

EJEMPLO 8.6

Un bono de S/. 500.000 a 21% MN, redimible a la par el 15 de noviembre del año 2002; se vende el 15 de mayo de 1996 con las siguientes opciones de rendimiento:

- a) Con una tasa de rendimiento de 20% anual capitalizable semestralmente.
- b) Con una tasa de rendimiento de 21% anual capitalizable semestralmente.
- c) Con una tasa de rendimiento de 22% anual capitalizable semestralmente.

Calcular el precio para cada opción e indicar el respectivo tipo de negociación (si es a la par, con premio o con castigo).

Solución

Valor de redención: $500.000(1) = S/. 500.000$

Número de cupones: 13

Valor de cada cupón: $500.000[(0,21)(180/360)] = S/. 52.500$

a) Con $i = 20\%$

$$P = 500.000(1 + 0,10)^{-13} + 52.500 \left[\frac{1 - (1 + 0,10)^{-13}}{0,10} \right]$$

$$P = 144.832,19 + 372.926,20 = S/. 517.758,39$$

Ésta es una negociación con premio pues su precio es mayor que el valor nominal.

b) Con $i = 21\%$

$$P = 500.000(1 + 0,105)^{-13} + 52.500 \left[\frac{1 - (1 + 0,105)^{-13}}{0,105} \right]$$

$$P = 136.540,15 + 363.459,85 = S/. 500.000$$

Ésta es una negociación a la par pues su precio es igual al valor nominal.

c) Con $i = 22\%$

$$P = 500.000(1 + 0,11)^{-13} + 52.500 \left[\frac{1 - (1 + 0,11)^{-13}}{0,11} \right]$$

$$P = 128.757,13 + 354.368,20 = S/. 483.125,32$$

Ésta es una negociación con castigo pues su precio es menor que el valor nominal del bono.

BONOS CUPÓN CERO

Son aquellos bonos que no tienen cupones; su valor actual o precio se calcula tomando sólo como referencia su valor nominal y la tasa de negociación.

EJEMPLO 8.7

Un bono de S/. 900.000 a 22% JN, redimible a la par el 10 de junio del año 2003, se negocia el 10 de junio de 1997 a una tasa de rendimiento de 21% anual capitalizable semestralmente. Calcular su precio.

Solución

Precio = Valor actual

$$\text{Precio} = 900.000(1 + 0,105)^{-12} = S/. 271.578,37$$

Otras clases de bonos

Además de los enunciados, existen diversas clases de bonos; entre ellos se destacan:

- Bonos seriados
- Bonos de anualidad
- Bonos de estabilidad monetaria (Bems)
- Bonos del Estado (a largo plazo)
- Bonos dólares
- Bonos con fecha opcional de redención
- Bonos de valor constante (para enfrentar la inflación)
- Bonos municipales.

En el presente texto no se incluyen más explicaciones sobre los distintos tipos de bonos.

SEGUROS

Se presentan algunas definiciones que orienten el tema.

*"Seguro es un contrato por el cual una persona natural o jurídica se obliga a resarcir pérdidas o daños que ocurran en las personas o cosas que corran riesgo"*³.

*"Seguros sociales: los que en previsión de ciertos riesgos (accidentes, enfermedad, vejez, paro, defunción, invalidez, etc.), impone el Estado en favor de los empleados, de las empresas y de los usuarios de ciertos servicios públicos"*⁴.

Es necesario resaltar que el seguro como contrato requiere que el asegurado realice un pago o varios pagos periódicos —denominados primas— al asegurador, a fin de que este último se obligue a resarcir las pérdidas o daños que puedan ocurrir.

En los seguros intervienen los siguientes elementos:

Asegurador

Compañía o empresa que se compromete a resarcir el objeto asegurado, si llega a suceder un accidente o evento.

Asegurado

Persona u objeto que es protegido por el asegurador, previo pago de una prima periódica, o al que se le reconoce una suma de dinero por eventos de muerte, accidente, etc.

Póliza

Contrato mediante el cual el asegurador se obliga con el asegurado a mantener el cubrimiento de un riesgo durante un periodo de tiempo.

3. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 210.

4. *Gran diccionario enciclopédico universal*. Ed. Alfredo Ortells.

Prima

Pago que realiza el asegurado al asegurador por una sola vez o periódicamente.

Indemnización

Pago que efectúa el asegurador al asegurado, en el caso de que suceda el evento sujeto del contrato de seguro o termine el plazo del seguro.

La persona o el objeto a ser asegurado

Persona natural o jurídica, por ejemplo: un agente viajero, una compañía de publicidad.

El riesgo que cubre el seguro

Por ejemplo, muerte, accidente, pérdida, incendio, robo, etc.

Valor deducido

Valor mínimo de deducción al valor cubierto o asegurado.

John E. Magee, en su obra *Seguros generales*, afirma: "La función del seguro consiste en proporcionar certidumbre. Para llegar a este fin, el seguro trata de reducir las consecuencias inciertas de un peligro conocido, de tal manera que el costo de las pérdidas, al efectuar a los individuos, sea cierto, o cuando menos relativamente cierto"⁵.

Además define el seguro: "Como proceso para efectuar certidumbre, cuando existen peligros amenazadores, el seguro puede ser definido, en un concepto amplio, como la garantía que uno da a otro contra alguna posible pérdida accidental... La práctica más generalizada es la de contribuir a formar un fondo común y, con ese fondo, pagar a quien haya sufrido una pérdida".

Dentro de estos conceptos se hallan incorporados los citados elementos, entre los cuales el más importante es el costo de la prima de seguro.

Más adelante plantea que "El costo de una prima de seguro debe incluir el costo actuarial o costo de las pérdidas, el costo de mantenimiento del negocio y el costo de las contribuciones para constituir una reserva para catástrofes"⁶.

Es decir, que la prima de seguro debe ser calculada en forma real, de modo que pueda cubrir la catástrofe en caso de producirse y no ser demasiado alta, para que pueda ser pagada por el asegurado.

Reaseguro

Es común que las compañías aseguradoras se aseguren a su vez en otras empresas aseguradoras de mayor envergadura, para garantizarse a sí mismas y a sus clientes; esto se conoce como reaseguro.

Magee divide el seguro en dos grupos, como parte de la estructura económica:

Seguro social obligatorio: cuya finalidad es proporcionar un mínimo de seguridad económica a todos los trabajadores para cubrir accidentes, enfermedades, invalidez, desempleo, muerte prematura, etc. El seguro social se caracteriza por su obligatoriedad legal y por ser administrado por el Estado.

5. John E. Magee. *Seguros generales*. Ed. Uteha, p. 3.

6. *Ibid.*, p. 3.

Seguro voluntario

Es tomado por el asegurado, voluntariamente o necesariamente, para proteger personas o bienes. Este tipo de seguro comprende todo el vasto negocio de seguros desarrollado por compañías de propiedad privada. Cubre seguros de vida, accidentes, seguros marítimos, de incendio, robo, fianzas, etc.

Portus Govinden da la siguiente definición de póliza de seguro de vida: "Póliza de seguro de vida es un contrato entre una compañía de seguros y una persona llamada asegurado, mediante el cual el asegurado se compromete a pagar una prima ya sea de una vez, o en pagos sucesivos (primas), comprometiéndose a su vez la compañía a pagar una suma fija a los beneficiarios al recibir las pruebas de la muerte del asegurado"⁷.

TASA DE INTERÉS REAL

De las tasas de interés estudiadas en este texto, se tomará la tasa efectiva o anual que, al ser relacionada con la tasa de inflación o la variación porcentual de índice de precios al consumidor, da lo que se denomina tasa de interés real.

Las tasas de interés real influyen significativamente en las economías de mercado, tanto en el ahorro como en los empréstitos o endeudamiento, y en las decisiones de inversión para poder calcular su rentabilidad.

La tasa de interés real (r) puede calcularse mediante dos fórmulas:

a) Tasa de interés real

$$r = \frac{\text{Tasa efectiva} - \text{Tasa de inflación}}{1 + \text{Tasa de inflación}} \quad (8.1)$$

$$r = \left[\frac{i - d}{1 + d} \right] 100$$

b) Tasa de interés con ajuste de inflación

$$= 100 \left| \frac{1 + \text{Tasa efectiva}}{1 + \text{Variación porcentual del índice de precios}} - 1 \right|$$

$$r = 100 \left| \frac{1 + i}{1 + P} - 1 \right|$$

7. Lincoyán Portus Govinden. *Op. cit.*, p. 245.

EJEMPLO 8.8

Calcular la tasa de interés real que se aplica en un país que tiene una tasa efectiva de 18% y una tasa de inflación de 8%. ¿Cuánto gana o pierde una persona que invierte S/. 10.000.000 en un año en ese país?

Solución

$$r = 100 \left| \frac{i - d}{1 + d} \right|$$

$$r = 100 \frac{0,18 - 0,08}{1 + 0,08} = 100 \left[\frac{0,10}{1,08} \right] = 100(0,0926)$$

$r = 9,26\%$, tasa de interés real, o también

$$r = 100 \left| \frac{(1 + 0,18)}{(1 + 0,08)} - 1 \right| = 100 \left| \frac{1,18}{1,08} - 1 \right|$$

$$r = 100 (0,0926) = 9,26\%$$

Ganancia o pérdida:

$$I = (C)(r) = 10.000.000 (0,0926) = \text{S/. } 926.000$$

S/. 926.000 como ganancia; también se puede calcular así:

$$I = \text{Cit};$$

$$I = (10.000.000)(0,0926)(1) = \text{S/. } 926.000$$

EJEMPLO 8.9

Calcular la tasa de interés real que se cobra en un país cuya tasa de interés efectiva es 15% y la tasa de inflación o variación porcentual del índice de precios al consumidor es 20%. ¿Cuánto gana o pierde una empresa que invierte S/. 100.000.000 en 1 año?

Solución

$$r = 100 \left| \frac{i - d}{1 + d} \right| = 100 \left| \frac{0,15 - 0,20}{1 + 0,20} \right|$$

$$r = 100(-0,041667) = -4,1667\%$$

$$I = 100.000.000 \left[\frac{-4,1667}{100} \right] = -\text{S/. } 4.166.666,67$$

Respuesta

Pérdida de S/. 4.166.666,67, en términos financieros.



TASAS DE INTERÉS INTERNACIONALES

Las tasas de interés utilizadas con más frecuencia en préstamos o financiamiento externo son la tasa LIBOR y la prime rate.

La tasa LIBOR, sigla que significa London Interbank Offered Rate, es una tasa de interés variable (de base flotante) de un grupo de los principales bancos y mercados de Londres. Es la principal base para las transacciones en el mercado de eurodólares y en el mundo occidental.

Por ejemplo, las transacciones para préstamos internacionales se realizan al 1 ó 2% sobre la tasa Libor; también varía según el plazo de los créditos; por ejemplo, en dos fechas diferentes:

a 30 días	8 3/4%	9 5/8%
a 180 días	8 5/15%	9 5/8%
a 360 días	9 3/16%	10 1/8%

Su variación afecta directamente en el pago de los intereses.

La Prime rate, es la tasa de interés fluctuante que rige en el mercado de capitales de Nueva York para operaciones de crédito. Esta tasa es un promedio de las tasas de interés que cobran los bancos más importantes de los Estados Unidos de Norteamérica. Es una tasa fluctuante; por ejemplo en un mes puede variar de 11% a 11 1/2% o a 11 1/4%.

Así mismo, su variación afecta directamente el pago de los respectivos intereses. Las referidas tasas de interés son muy utilizadas, especialmente en préstamos internacionales tanto para el Estado como para las empresas privadas que los requieren para financiar sus programas de desarrollo e inversiones. Incluso se utilizan en el sistema de préstamos como amortización gradual y préstamos de proveedores.

VALOR ACTUAL NETO (VAN)

Según Celio Vega, en su obra *Ingeniería económica*, "el valor actual neto (VAN) de una inversión es igual a la suma algebraica de los valores actualizados de los flujos netos de caja asociados a esa inversión... Si el valor actual neto de una inversión es positivo, la inversión debe aceptarse, y rechazarse si es negativo".

Estos conceptos dan a entender que el VAN está relacionado con una tasa de interés y debe ser calculado con la fórmula del valor actual en interés compuesto:

$C = M(1 + i)^{-n}$ donde M es el flujo de caja de un determinado año, durante el número de años que se desee calcular los flujos de caja como valores actuales.

El VAN se utiliza en el cálculo de la tasa interna de retorno, como se verá más adelante.

TASA INTERNA DE RETORNO

La tasa interna de rendimiento o tasa interna de retorno de la inversión es un indicador financiero que se utiliza en la evaluación de proyectos para considerar la factibilidad de un

proyecto; en otras palabras, si un proyecto de inversión es o no rentable, sea éste una refinería, una planta de gas, una fábrica de papel, etc. Significa calcular el valor actual neto de una inversión que se va a realizar y su posible recuperación a el largo plazo, con diferentes alternativas de tasas de interés.

A continuación se citan algunas definiciones:

*"Tasa interna de rendimiento es aquella por la cual se expresa el lucro o beneficio neto que proporciona una determinada inversión en función de un porcentaje anual, que permite igualar el valor actual de los beneficios y costos y, en consecuencia, el resultado del valor actual neto actual es igual a cero. Si la tasa interna de rendimiento es igual o sobrepasa el costo estimado de oportunidad o de sustitución del capital, la inversión permitirá, por lo menos, recuperar todos los gastos de explotación y de capital"*⁸.

*"Tasa interna de retorno (Internal Rate of Return) es la tasa de interés que equivale al valor presente de la expectativa futura de recibir el costo del gasto desembolsado. (As the interest rate that equates the present value of the expected receipts to the cost the investment outlay)"*⁹.

*"La tasa de rentabilidad se obtiene en pruebas necesarias con distintos tipos de interés hasta conseguir que se igualen los ingresos líquidos y los desembolsos para la inversión, descontados al momento inicial, con lo cual el valor del proyecto se hace cero"*¹⁰.

La tasa interna de retorno (TIR) puede calcularse mediante la siguiente ecuación, al tomar los datos del valor actual neto (VAN), el flujo neto de caja (FNC), el número de periodos de duración del proyecto (n) y los diferentes periodos (K , años) que se toman¹¹.

$$VAN = \sum_{k=0}^n \frac{FNC_k}{(1 + TIR)^k} = 0 \quad (8.3)$$

EJEMPLO 8.10

Una empresa estima los siguientes flujos de caja durante 6 años de un proyecto X. Si se considera el costo del capital $r = 10\%$ y una inversión inicial de S/. 600.000, en el año cero, calcular la tasa interna de retorno.

8. Nelson Dávalos Arcentales. *Op. cit.*, p. 498.

9. Fred Weston J. y Eugene Brigham F. *Managerial Finance*. 3. ed. Ed. Holt Rinehart and Winston. Nueva York, 1969, p.182.

10. N.A.A. Research Report. *Selección y planificación de inversiones*. Ed. Ibérico Europea de Ediciones S. A. Madrid, 1968, p. 218.

11. Celio Vega. *Op. cit.*, p. 104.

Año	0	1	2	3	4	5	6
Ventas	–	500	500	500	500	500	500
Costo de op.	–	350	350	350	350	350	350
Depreciación	–	100	100	100	100	100	100
Utilidad (sin impuestos)	–	50	50	50	50	50	50
Flujo neto de caja (utilidad + depreciación)	600	150	150	150	150	150	150

Primero se calcula el valor actual neto para cada año:

Con $r = 12\%$:

Con $r = 14\%$:

$$FNC_0 = \begin{array}{l} - VAN_1 \\ - 600 \end{array}$$

$$VAN_2 \\ - 600$$

$$FNC_1 = \frac{150}{(1+r)^1} = 133,93$$

$$131,58$$

$$FNC_2 = \frac{150}{(1+r)^2} = 119,58$$

$$115,42$$

$$FNC_3 = \frac{150}{(1+r)^3} = 106,78$$

$$101,25$$

$$FNC_4 = \frac{150}{(1+r)^4} = 95,33$$

$$88,80$$

$$FNC_5 = \frac{150}{(1+r)^5} = 85,11$$

$$77,90$$

$$FNC_6 = \frac{150}{(1+r)^6} = 75,99$$

$$68,34 \\ - 16,71$$

Como se halló un valor positivo y otro negativo, esto significa que la tasa interna de retorno se encuentra entre los límites:

$$r_1 = 12 \text{ y } r_3 = 14$$

Entonces, la tasa interna de retorno puede calcularse por interpolación de las dos tasas:

$$r_1 = 12\% \text{ y } r_2 = 14\%$$

$$TIR = r_1 + (r_2 - r_1) \left[\frac{VAN_1}{VAN_1 - VAN_2} \right]$$

$$TIR = 0,12 + (0,14 - 0,12) \left[\frac{16,72}{16,72 - (16,71)} \right]$$

$$TIR = 0,12 + (0,02) \frac{16,72}{33,43} = 0,12 + 0,02 (0,5)$$

$$TIR = 0,12 + 0,01 = 0,13$$

$$TIR = 13\%$$

que, de acuerdo con las condiciones del problema, indica que la inversión podrá ser ventajosa ya que el costo del capital es 10%.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El 1 de enero de 1990 un inversionista compró un bono de S/. 100.000 al 20% E J, redimible a la par el 1 de julio de 1999. a) ¿Cuánto recibirá el 1 de julio de 1999? b.) ¿Cuántos cupones cobrará y cuál será el valor de cada uno?

Respuestas

a) S/. 100.000 b) 19 cupones de S/. 10.000 c/u.

2. El 1 de junio de 1993 se compra un bono de S/. 100.000 a 12% D J, redimible a 103 el 1 de diciembre del año 2007. ¿Cuánto recibirá el comprador en la fecha de redención? ¿Cuántos cupones cobrará y cuál será el valor de cada uno?

Respuestas

a) S/. 103.000 b) 29 cupones de S/. 6.000 c/u.

3. Calcular el precio que se puede pagar por un bono de S/. 10.000.000 al 13% FA, redimible a 102 después de 10 años, si se desea un rendimiento de 12% capitalizable semestralmente.

Respuesta

S/. 10.635.875,01

4. Con el propósito de ganar 17% anual capitalizable semestralmente, el 15 de marzo de 1992 se compra un bono de S/. 3.000.000 al 18% MS, redimible a la par el 15 de marzo del año 2007. Hallar el precio de compra.

Respuesta

S/. 3.161.202,657

5. Hallar el precio de un bono de S/. 5.000.000, al 16% MS, redimible a la par el 21 de marzo del año 2010, si se negocia el 21 de septiembre de 1998 a una tasa de rendimiento de 15% anual capitalizable semestralmente.

Respuesta

S/. 5.270.167,23

6. Indicar en el problema 5 si la negociación es a la par, con premio o con castigo. Justificar la respuesta.

Respuesta

La negociación es con premio, por cuanto la tasa de negociación es menor que la nominal del bono: $15\% < 16\%$, lo cual da un precio mayor: S/. 5.270.167,23.

7. Hallar el precio de compra (sucio) de un bono de S/. 1.000.000, al 14% E J redimible a la par el 1 de julio del 2009, si se compra el 18 de abril de 1994, a fin de que reditúe 13% anual capitalizable semestralmente.

Respuesta

S/. 1.106.839,82

8. En el problema anterior, calcular el precio del bono limpio.

Respuesta

S/. 1.064.839,82

9. Calcular el precio de un bono (sucio) de S/. 2.000.000 al 22% MN, redimible a la par el 30 de noviembre del 2003, si se compra el 15 de febrero de 1997 con un rendimiento de 21% anual capitalizable semestralmente.

Respuesta

S/. 2.159.319,92

10. Calcular el precio del bono limpio del problema 9.

Respuesta

S/. 2.065.208,81

11. Calcular la tasa de interés real, si la tasa efectiva es 15% y la tasa de inflación, 6%.

Respuesta

Tasa de interés real: 8,4906%

12. Calcular el valor real del interés generado y el valor real de la inversión de S/. 100.000.000 durante un año, según los datos del problema anterior.

Respuestas

Valor real del interés generado: S/. 8.490.566,04

Valor real de la inversión: S/. 108.490.566,04

13. Calcular la tasa de interés real de una inversión de S/. 76.000.000 durante un año, si la tasa efectiva fue 43% y el índice de precios al consumidor o tasa de inflación, 35%.

Respuesta

Tasa de interés real: 5,9259%

14. En el problema anterior, calcular el valor real de los intereses generados y el valor real de la inversión.

Respuesta

S/. 4.503.703,7 y S/. 80.503.703,7

15. Calcular la tasa de interés real que se aplica a una inversión de S/. 100.000, si la tasa efectiva es 18% y la variación porcentual del índice de precios al consumidor, 12%.

Respuesta

Tasa de interés real: 5.3571%

16. ¿Cuál es la ganancia o pérdida, en términos financieros, de la inversión del problema anterior durante 1 año?

Respuesta

S/. 5.357,14 de ganancia, en términos financieros.

17. Una empresa proporciona los siguientes datos para analizar si su inversión es rentable:

Inversión: S/. 100.000.000; ingreso anual por renta promedio: S/. 30.000.000; costo anual de operación: S/. 5.000.000; depreciación anual: S/. 20.000.000. Calcular su valor actual neto, si espera recuperar su inversión en 5 años. Considerar dos alternativas de tasa de interés.

Respuestas

Considerando una tasa de 7%: VAN = S/. 2.504.935,90

Considerando una tasa de 8%: VAN = - S/. 182.249,06

18. Calcular la tasa interna de retorno para el problema 17 e indicar si la inversión es rentable considerando el rendimiento del dinero con una tasa de interés real del 15%.

Respuesta

TIR = 7,9322%. La inversión no es rentable.

19. Una empresa requiere hacer una inversión de S/. 100.000.000 y proyecta los siguientes datos: ingreso anual por ventas: S/. 32.000.000; costo anual de operación:

S/. 7.000.000; depreciación anual S/. 10.000.000. Calcular su VAN si quiere recuperar su inversión en 10 años. Considerar dos alternativas de tasas de interés.

Respuestas

Considerando una tasa de 21%; $VAN = S/. 1.351.949,04$

Considerando una tasa de 22%; $VAN = - S/. 1.920.391,691$

20. En el problema 19, calcular la tasa interna de retorno e indicar si la inversión es rentable, cuando el costo del dinero está a una tasa de interés real de 16%.

Respuesta

$TIR = 21,4131\%$. La inversión sí es rentable.

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcular el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón de un bono de S/. 100.000 al 15% MS, suscrito el 20 de marzo de 1992, redimible a la par el 20 de marzo de 1999.
2. Un bono de S/. 500.000 al 20% AO, se suscribió el 15 de abril de 1993, redimible a 101 el 15 de abril de 1998.
Calcular el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón.
3. Calcular el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón de un bono de S/. 900.000 al 18% MN, suscrito el 7 de mayo de 1995, redimible a 99 el 7 de mayo del año 2005.
4. Calcular el precio de un bono de S/. 1.000.000 al 21% MS, redimible a la par el 18 de septiembre de 1999, si se negocia el 18 de marzo de 1994 a una tasa de 20% anual capitalizable semestralmente.
5. En el problema anterior, explicar qué tipo de negociación lleva a cabo el vendedor: con premio, a la par o con castigo.
6. En el problema 4, si la tasa de negociación es de 22% anual capitalizable semestralmente, calcular el precio del bono e indicar qué tipo de negociación es.
7. En el problema 4, considerar una tasa de negociación de 21% anual capitalizable semestralmente.
8. Un bono de S/. 800.000 al 15% AO, redimible a la par el 24 de octubre de 1999, se negocia el 6 de junio de 1995 a una tasa de rendimiento del 14% anual capitalizable semestralmente. Calcular el precio del bono al 6 de junio.

9. Calcular el precio del bono limpio en el problema anterior.
10. Calcular la tasa de interés real que se aplica en un país que tiene una tasa efectiva de 25% y una tasa de inflación o variación porcentual del índice de precios al consumidor de 21% anual. ¿Cuánto gana o pierde una empresa, en términos reales, si invierte S/. 900.000.000 en un año?

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. Valor de redención: $(100.000)(1) = \text{S/}. 100.000$
 Número de cupones: 14
 Valor de cada cupón: $(100.000)(0,15)(180/360) = \text{S/}. 7.500$
2. Valor de redención: $(500.000)(1,01) = \text{S/}. 505.000$
 Número de cupones: 10
 Valor de cada cupón: $(500.000)(0,20)(180/360) = \text{S/}. 50.000$
3. Valor de redención: $(900.000)(0,99) = \text{S/}. 891.000$
 Número de cupones: 20
 Valor de cada cupón: $(900.000)(0,18)(180/360) = \text{S/}. 81.000$
4. Valor de redención: $1.000.000(1) = \text{S/}. 1.000.000$
 Número de cupones: 11
 Valor de cada cupón: $1.000.000(0,105) = \text{S/}. 105.000$

$$\text{Precio} = 1.000.000(1 + 0,10)^{-11} + 105.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,10)^{-11}}{0,10} \right]$$

$$\text{Precio} = 350.493,90 + 681.981,40 = \text{S/}. 1.032.475,30$$

Respuesta

$$\text{Precio} = \text{S/}. 1.032.475,30$$

5. Como la tasa de negociación es menor que la nominal del bono, es lógico que el precio sea mayor que el valor nominal del bono; por tanto, es una negociación con premio para el vendedor
 $1.032.475,30 - 1.000.000 = \text{S/}. 32.475,30$ a favor del vendedor.

$$6. \text{Precio} = 1.000.000(1 + 0,11)^{-11} + 105.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,11)^{-11}}{0,11} \right]$$

$$\text{Precio} = 317.283,31 + 651.684,11 = \text{S/}. 968.967,42$$

El precio es S/. 968.967,42; se trata de una negociación con castigo para el vendedor, pues el precio es menor que el valor nominal del bono.

$$7. \text{ Precio} = 1.000.000(1 + 0,105)^{-11} + 105.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,105)^{-11}}{0,105} \right]$$

$$\text{Precio} = 333.437,88 + 666.562,12 = \text{S/}. 1.000.000$$

Se trata de una negociación a la par pues el precio es igual al valor nominal, S/. 1.000.000.

8. Se trata de una negociación en una fecha diferente de la de pago de intereses; por tanto, primero se debe calcular el precio del bono en la fecha última de pago de intereses antes de la venta.

$$\text{Valor de redención: } 800.000(1) = \text{S/}. 800.000$$

Número de cupones: 9

$$\text{Valor de cada cupón: } 800.000(0,15)(180/360) = \text{S/}. 60.000$$

$$\text{Precio} = 800.000(1 + 0,07)^{-9} + 60.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,07)^{-9}}{0,07} \right]$$

$$\text{Precio} = 435.146,99 + 390.913,94 = \text{S/}. 826.060,93$$

Número de días comprendidos entre 24 de abril y 6 de junio: 43

Monto = $826.060,93[1 + 0,07(43/180)] = \text{S/}. 839.874,50$ que es el precio del bono sucio a la citada fecha.

Respuesta

El precio del bono (sucio) es S/. 839.874,50

9. Es necesario calcular previamente el interés redituable.

$$\text{Interés redituable} = (43/180)(60.000) = \text{S/}. 14.333,33$$

$$\text{Precio del bono limpio} = 839.874,50 - 14.333,33 = \text{S/}. 825.541,17$$

Respuesta

El precio del bono limpio es S/. 825.541,17

10. Tasa efectiva $i = 25\% = 0,25$

Tasa de inflación: $d = 21\% = 0,21$

Plazo: 1 año

Primero se debe calcular la tasa de interés real:

$$r = 100 \left[\frac{0,25 - 0,21}{1 + 0,21} \right] = 3,305785\%$$

Luego se calcula el interés generado en un año:

$$I = 900.000.000(0,033057)(1) = \text{S/}. 29.752.065$$

Respuesta

Obtiene una ganancia de S/. 29.752.065

ACTIVIDADES DE REPASO

1. ¿Qué es un sistema financiero?, ¿cuáles son sus componentes principales?
2. ¿En qué consiste el mercado de valores?
3. ¿En qué se diferencian los documentos de renta fija de los de renta variable?
4. ¿Cómo se calcula el precio y el rendimiento de los documentos financieros?
5. ¿Qué es un bono?, ¿cuáles son sus características?
6. ¿Cómo se calcula el precio de un bono?
7. ¿Cómo se calcula el precio de un bono sucio y de un bono limpio?
8. ¿Qué es un seguro?
9. ¿En qué consiste la tasa de interés real?, ¿cómo se calcula?
10. ¿Qué es valor actual neto y tasa interna de retorno?

A n e x o s

ÍNDICE DE TABLAS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tabla 1

Factor fijo para cálculo de intereses por depósito de ahorro S/. 1 (14% anual)

Tabla 2

Factor fijo para cálculo de intereses por depósito de ahorro S/. 1 (14% anual)

Tabla 3

Monto a interés compuesto de S/. 1 $M = C(1 + i)^n$

Tabla 4

Valor actual a interés compuesto de S/. 1 $C = (1 + i)^{-n}$

Tabla 5

Monto de una anualidad de S/. 1 $S = 1 \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$

Tabla 6

Valor actual de una anualidad de S/. 1 (amortización) $A = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$

Tabla 7

Depósito periódico (R) de una anualidad $R = \frac{1}{\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]}$

Tabla 8

Pago periódico (R) de una anualidad $R = \frac{1}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]}$

A DEL E

Tabla 1

Factor fijo para cálculo de intereses por depósito de ahorro S/. 1 (14% anual)
I Semestre (181 días)

$$\text{Ejemplo: 2 de enero I} = \text{Cit} = 1 * 0.14 * \frac{180}{365} = 0.069041096$$

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
1	0,069424658	0,057534247	0,046794521	0,034904110	0,023397260	0,011506849
2	0,069041096	0,057150685	0,046410959	0,034520548	0,023013699	0,011123288
3	0,068657534	0,056767123	0,046027397	0,034136986	0,022630137	0,010739726
4	0,068273973	0,056383562	0,045643836	0,033753425	0,022246575	0,010356164
5	0,067890411	0,056000000	0,045260274	0,033369863	0,021863014	0,009972603
6	0,067506849	0,055616438	0,044876712	0,032986301	0,021479452	0,009589041
7	0,067123288	0,055232877	0,044493151	0,032602740	0,021095890	0,009205479
8	0,066739726	0,054849315	0,044109589	0,032219178	0,020712329	0,008821918
9	0,066356164	0,054465753	0,043726027	0,031835616	0,020328767	0,008438356
10	0,065972603	0,054082192	0,043342466	0,031452055	0,019945205	0,008054795
11	0,065589041	0,053698630	0,042958904	0,031068493	0,019561644	0,007671233
12	0,065205479	0,053315068	0,042575342	0,030684932	0,019178082	0,007287671
13	0,064821918	0,052931507	0,042191781	0,030301370	0,018794521	0,006904110
14	0,064438356	0,052547945	0,041808219	0,029917808	0,018410959	0,006520548
15	0,064054795	0,052164384	0,041424658	0,029534247	0,018027397	0,006136986
16	0,063671233	0,051780822	0,041041096	0,029150685	0,017643836	0,005753425
17	0,063287671	0,051397260	0,040657534	0,028767123	0,017260274	0,005369863
18	0,062904110	0,051013699	0,040273973	0,028383562	0,016876712	0,004986301
19	0,062520548	0,050630137	0,039890411	0,028000000	0,016493151	0,004602740
20	0,062136986	0,050246575	0,039506849	0,027616438	0,016109589	0,004219178
21	0,061753425	0,049863014	0,039123288	0,027232877	0,015726027	0,003835616
22	0,061369863	0,049479452	0,038739726	0,026849315	0,015342466	0,003452055
23	0,060986301	0,049095890	0,038356164	0,026465753	0,014958904	0,003068493
24	0,060602740	0,048712329	0,037972603	0,026082192	0,014575342	0,002684932
25	0,060219178	0,048328767	0,037589041	0,025698630	0,014191781	0,002301370
26	0,059835616	0,047945205	0,037205479	0,025315068	0,013808219	0,001917808
27	0,059452055	0,047561644	0,036821918	0,024931507	0,013424658	0,001534247
28	0,059068493	0,047178082	0,036438356	0,024547945	0,013041096	0,001150685
29	0,058684932		0,036054795	0,024164384	0,012657534	0,000767123
30	0,058301370		0,035671233	0,023780822	0,012273973	0,000383562
31	0,057917808		0,035287671		0,011890411	

Tabla 2

Factor fijo para cálculo de intereses por depósito de ahorro S/. 1 (14% anual)
II Semestre (184 días)

$$\text{Ejemplo: 1 de julio } I = \text{Cit} = 1 * 0.14 * \frac{184}{365} = 0,070575342$$

	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1	0,070575342	0,058684932	0,046794521	0,035287671	0,023397260	0,011890411
2	0,070191781	0,058301370	0,046410959	0,034904110	0,023013699	0,011506849
3	0,069808219	0,057917808	0,046027397	0,034520548	0,022630137	0,011123288
4	0,069424658	0,057534247	0,045643836	0,034136986	0,022246575	0,010739726
5	0,069041096	0,057150685	0,045260274	0,033753425	0,021863014	0,010356164
6	0,068657534	0,056767123	0,044876712	0,033369863	0,021479452	0,009972603
7	0,068273973	0,056383562	0,044493151	0,032986301	0,021095890	0,009589041
8	0,067890411	0,056000000	0,044109589	0,032602740	0,020712329	0,009205479
9	0,067506849	0,055616438	0,043726027	0,032219178	0,020328767	0,008821918
10	0,067123288	0,055232877	0,043342466	0,031835616	0,019945205	0,008438356
11	0,066739726	0,054849315	0,042958904	0,031452055	0,019561644	0,008054795
12	0,066356164	0,054465753	0,042575342	0,031068493	0,019178082	0,007671233
13	0,065972603	0,054082192	0,042191781	0,030684932	0,018794521	0,007287671
14	0,065589041	0,053698630	0,041808219	0,030301370	0,018410959	0,006904110
15	0,065205479	0,053315068	0,041424658	0,029917808	0,018027397	0,006520548
16	0,064821918	0,052931507	0,041041096	0,029534247	0,017643836	0,006136986
17	0,064438356	0,052547945	0,040657534	0,029150685	0,017260274	0,005753425
18	0,064054795	0,052164384	0,040273973	0,028767123	0,016876712	0,005369863
19	0,063671233	0,051780822	0,039890411	0,028383562	0,016493151	0,004986301
20	0,063287671	0,051397260	0,039506849	0,028000000	0,016109589	0,004602740
21	0,062904110	0,051013699	0,039123288	0,027616438	0,015726027	0,004219178
22	0,062520548	0,050630137	0,038739726	0,027232877	0,015342466	0,003835616
23	0,062136986	0,050246575	0,038356164	0,026849315	0,014958904	0,003452055
24	0,061753425	0,049863014	0,037972603	0,026465753	0,014575342	0,003068493
25	0,061369863	0,049479452	0,037589041	0,026082192	0,014191781	0,002684932
26	0,060986301	0,049095890	0,037205479	0,025698630	0,013808219	0,002301370
27	0,060602740	0,048712329	0,036821918	0,025315068	0,013424658	0,001917808
28	0,060219178	0,048328767	0,036438356	0,024931507	0,013041096	0,001534247
29	0,059835616	0,047945205	0,036054795	0,024547945	0,012657534	0,001150685
30	0,059452055	0,047561644	0,035671233	0,024164384	0,012273973	0,000767123
31	0,059068493	0,047178082		0,023780822		0,000383562

Tabla 3

Monto a interés compuesto de \$/. $M = C(1 + i)^n$
 Ejemplo: $n = 20$ $i = 9\%$ $M = 1(1 + 0,09)^{20} = 5,604410768$

<i>n</i>	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	1,090000000	1,100000000	1,110000000	1,120000000	1,130000000	1,140000000
2	1,188100000	1,210000000	1,232100000	1,254400000	1,276900000	1,299600000
3	1,295029000	1,331000000	1,367631000	1,404928000	1,442897000	1,481544000
4	1,411581610	1,464100000	1,518070410	1,573519360	1,630473610	1,688960160
5	1,538623955	1,610510000	1,685058155	1,762341683	1,842435179	1,925414582
6	1,677100111	1,771561000	1,870414552	1,973822685	2,081951753	2,194972624
7	1,828039121	1,948717100	2,076160153	2,210681407	2,352605480	2,502268791
8	1,992562642	2,143588810	2,304537770	2,475963176	2,658444193	2,852586422
9	2,171893279	2,357947691	2,558036924	2,773078757	3,004041938	3,251948521
10	2,367363675	2,593742460	2,839420986	3,105848208	3,394567390	3,707221314
11	2,580426405	2,853116706	3,151757295	3,478549993	3,835861151	4,226232298
12	2,812664782	3,138428377	3,498450597	3,895975993	4,334523100	4,817904820
13	3,065804612	3,452271214	3,883280163	4,363493112	4,898011103	5,492411495
14	3,341727027	3,797498336	4,310440980	4,887112285	5,534752547	6,261349104
15	3,642482460	4,177248169	4,784589488	5,473565759	6,254270378	7,137937978
16	3,970305881	4,594972986	5,310894332	6,130393650	7,067325527	8,137249295
17	4,327633410	5,054470285	5,895092709	6,866040888	7,986077845	9,276464197
18	4,717120417	5,559917313	6,543552907	7,689965795	9,024267965	10,575169184
19	5,141661255	6,115909045	7,263343726	8,612761690	10,197422801	12,055692870
20	5,604410768	6,727499949	8,062311536	9,646293093	11,523087765	13,743489872
21	6,108807737	7,400249944	8,949165805	10,803848264	13,021089174	15,667578454
22	6,658600433	8,140274939	9,933574044	12,100310056	14,713830767	17,861039437
23	7,257874472	8,954302433	11,026267188	13,552347263	16,626628766	20,361584959
24	7,911083175	9,849732676	12,239156579	15,178628935	18,788090506	23,212206853
25	8,623080660	10,834705943	13,585463803	17,000064407	21,230542272	26,461915812
26	9,399157920	11,918176538	15,079864821	19,040072135	23,990512767	30,166584026
27	10,245082133	13,109994191	16,738649952	21,324880792	27,109279427	34,389905790
28	11,167139525	14,420993611	18,579901446	23,883866487	30,633485752	39,204492600
29	12,172182082	15,863092972	20,623690605	26,749930465	34,615838900	44,693121564
30	13,267678469	17,449402269	22,892296572	29,959922121	39,115897957	50,950158583
31	14,461769531	19,194342496	25,410449195	33,555112775	44,200964692	58,083180785
32	15,763328789	21,113776745	28,205598606	37,581726308	49,947090102	66,214826095
33	17,182028380	23,225154420	31,308214453	42,091533465	56,440211815	75,484901748
34	18,728410934	25,547669862	34,752118043	47,142517481	63,777439351	86,052787993
35	20,413967919	28,102436848	38,574851027	52,799619579	72,068506467	98,100178312
36	22,251225031	30,912680533	42,818084640	59,135573929	81,437412307	111,834203276
37	24,253835284	34,003948586	47,528073951	66,231842800	92,024275907	127,490991734
38	26,436680460	37,404343445	52,756162086	74,179663936	103,987431775	145,339730577
39	28,815981701	41,144777789	58,559339915	83,081223608	117,505797906	165,687292858
40	31,409420054	45,259255568	65,000867306	93,050970441	132,781551634	188,883513858
41	34,236267859	49,785181125	72,150962709	104,217086894	150,043153346	215,327205798
42	37,317531966	54,763699237	80,087568607	116,723137322	169,548763281	245,473014610
43	40,676109843	60,240069161	88,897201154	130,729913800	191,590102507	279,839236655
44	44,336959729	66,264076077	98,675893281	146,417503456	216,496815833	319,016729787
45	48,327286105	72,890483685	109,530241542	163,987603871	244,641401892	363,679071957
46	52,676741854	80,179532054	121,578568111	183,666116336	276,444784138	414,594142031
47	57,417648621	88,197485259	134,952210604	205,706050296	312,382606075	472,637321915
48	62,585236997	97,017233785	149,796953770	230,390776331	352,992344865	538,806546983
49	68,217908326	106,718957163	166,274618685	258,037669491	398,881349698	614,239463561
50	74,357520076	117,390852880	184,564826740	289,002189830	450,735925158	700,232988459

Tabla 4

Valor actual a interés compuesto de $S/$. $1 C = (1 + i)^{-n}$
 Ejemplo: $n = 20$ $i = 11\%$ $C = 1(1 + 0.11)^{-20} = 0,124033907$

n	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	0,917431193	0,909090909	0,900900901	0,892857143	0,884955752	0,877192982
2	0,841679993	0,826446281	0,811622433	0,797193878	0,783146683	0,769467528
3	0,772183480	0,751314801	0,731191381	0,711780248	0,693050162	0,674971516
4	0,708425211	0,683013455	0,658730974	0,635518078	0,613318728	0,592080277
5	0,649931386	0,620921323	0,593451328	0,567426856	0,542759936	0,519368664
6	0,596267327	0,564473930	0,534640836	0,506631121	0,480318527	0,455586548
7	0,547034245	0,513158118	0,481658411	0,452349215	0,425060644	0,399637323
8	0,501866280	0,466507380	0,433926496	0,403883228	0,376159862	0,350559055
9	0,460427780	0,424097618	0,390924771	0,360610025	0,332884833	0,307507943
10	0,422410807	0,385543289	0,352184479	0,321973237	0,294588348	0,269743810
11	0,387532850	0,350493899	0,317283314	0,287476104	0,260697653	0,236617377
12	0,355534725	0,318630818	0,285840824	0,256675093	0,230705888	0,207559102
13	0,326178647	0,289664380	0,257514256	0,229174190	0,204164502	0,182069388
14	0,299246465	0,263331254	0,231994825	0,204619813	0,180676551	0,159709990
15	0,274538041	0,239392049	0,209004347	0,182696261	0,159890753	0,140096482
16	0,251869763	0,217629136	0,188292204	0,163121662	0,141496242	0,122891651
17	0,231073177	0,197844669	0,169632616	0,145644341	0,125217913	0,107799694
18	0,211993740	0,179858790	0,152822177	0,130039590	0,110812312	0,094561135
19	0,194489670	0,163507991	0,137677637	0,116106777	0,098063993	0,082948364
20	0,178430890	0,148643628	0,124033907	0,103666765	0,086782295	0,072761723
21	0,163698064	0,135130571	0,111742259	0,092559612	0,076798491	0,063826073
22	0,150181710	0,122845974	0,100668701	0,082642510	0,067963266	0,055987783
23	0,137781385	0,111678158	0,090692524	0,073787956	0,060144484	0,049112090
24	0,126404941	0,101525598	0,081704976	0,065882103	0,053225207	0,043080781
25	0,115967836	0,092295998	0,073608087	0,058823307	0,047101953	0,037790159
26	0,106392510	0,083905453	0,066313592	0,052520809	0,041683144	0,033149262
27	0,097607807	0,076277684	0,059741975	0,046893580	0,036887738	0,029078300
28	0,089548447	0,069343349	0,053821599	0,041869368	0,032644016	0,025507281
29	0,082154538	0,063039409	0,048487927	0,037383275	0,028888510	0,022374808
30	0,075371136	0,057308553	0,043682817	0,033377924	0,025565053	0,019627024
31	0,069147831	0,052098685	0,039353889	0,029801718	0,022623941	0,017216688
32	0,063438377	0,047362441	0,035453954	0,026608677	0,020021186	0,015102358
33	0,058200346	0,043056764	0,031940499	0,023757747	0,017717864	0,013247682
34	0,053394813	0,039142513	0,028775225	0,021212274	0,015679526	0,011620774
35	0,048986067	0,035584103	0,025923626	0,018939530	0,013875686	0,010193661
36	0,044941346	0,032349184	0,023354618	0,016910295	0,012279369	0,008941808
37	0,041230593	0,029408349	0,021040196	0,015098478	0,010866698	0,007843691
38	0,037826232	0,026734863	0,018955132	0,013480784	0,009616547	0,006880431
39	0,034702965	0,024304421	0,017076695	0,012036414	0,008510218	0,006035466
40	0,031837582	0,022094928	0,015384410	0,010746798	0,007531167	0,005294268
41	0,029208791	0,020086298	0,013859829	0,009595356	0,006664749	0,004644095
42	0,026797056	0,018260271	0,012486332	0,008567282	0,005898008	0,004073768
43	0,024584455	0,016600247	0,011248948	0,007649359	0,005219476	0,003573480
44	0,022554546	0,015091133	0,010134187	0,006829785	0,004619006	0,003134632
45	0,020692244	0,013719212	0,009129899	0,006098022	0,004087616	0,002749677
46	0,018983710	0,012472011	0,008225134	0,005444662	0,003617359	0,002411997
47	0,017416248	0,011338192	0,007410031	0,004861306	0,003201203	0,002115787
48	0,015978209	0,010307447	0,006675703	0,004340452	0,002832923	0,001855954
49	0,014658907	0,009370406	0,006014147	0,003875403	0,002507011	0,001628030
50	0,013448539	0,008518551	0,005418150	0,003460181	0,002218594	0,001428096

Tabla 5

Monto de una anualidad de \$/. $S = 1 \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$

Ejemplo: $n = 20$ $i = 12\%$ $S = 1 \left[\frac{(1+0,12)^{20} - 1}{0,12} \right] = 72,052442444$

<i>n</i>	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
2	2,090000000	2,100000000	2,110000000	2,120000000	2,130000000	2,140000000
3	3,278100000	3,310000000	3,342100000	3,374400000	3,406900000	3,439600000
4	4,573129000	4,641000000	4,709731000	4,779328000	4,849797000	4,921144000
5	5,984710610	6,105100000	6,227801410	6,352847360	6,480270610	6,610104160
6	7,523334565	7,715610000	7,912859565	8,115189043	8,322705789	8,535518742
7	9,200434676	9,487171000	9,783274117	10,089011728	10,404657542	10,730491366
8	11,028473797	11,435888100	11,859434270	12,299693136	12,757263022	13,232760158
9	13,021036438	13,579476910	14,163972040	14,775656312	15,415707215	16,085346580
10	15,192929718	15,937424601	16,722008964	17,548735070	18,419749153	19,337295101
11	17,560293392	18,531167061	19,561429950	20,654583278	21,814316543	23,044516415
12	20,140719798	21,384283767	22,713187245	24,133133271	25,650177694	27,270748713
13	22,953384579	24,522712144	26,211637842	28,029109264	29,984700794	32,088653533
14	26,019189192	27,974983358	30,094918004	32,392602375	34,882711897	37,581065027
15	29,360916219	31,772481694	34,405358985	37,279714660	40,417464444	43,842414131
16	33,003398678	35,949729864	39,189948473	42,753280420	46,671734822	50,980352110
17	36,973704559	40,544702850	44,500842805	48,883674070	53,739060348	59,117601405
18	41,301337970	45,599173135	50,395935514	55,749714959	61,725138194	68,394065602
19	46,018458387	51,159090448	56,939488420	63,439680754	70,749406159	78,969234786
20	51,160119642	57,274999493	64,202832147	72,052442444	80,946828959	91,024927656
21	56,764530410	64,002499443	72,265143683	81,698735537	92,469916724	104,768417528
22	62,873338147	71,402749387	81,214309488	92,502583802	105,491005898	120,436995982
23	69,531938580	79,543024326	91,147883532	104,602893858	120,204836665	138,297035419
24	76,789813052	88,497326758	102,174150720	118,155241121	136,831465432	159,658620378
25	84,700896227	98,347059434	114,413307299	133,333870055	155,619555938	181,870827231
26	93,323976887	109,181765377	127,998771102	150,333934462	176,850098209	208,332743043
27	102,723134807	121,099941915	143,078635923	169,374006597	200,840610977	238,499327069
28	112,968216940	134,209936106	159,817285875	190,698887389	227,949890404	272,889232859
29	124,135356464	148,630929717	178,397187321	214,582753876	258,583376156	312,093725459
30	136,307538546	164,494022089	199,020877926	241,332684341	293,199215056	356,786047024
31	149,575217015	181,943424958	221,913174498	271,292606462	332,315113014	407,737005607
32	164,036986546	201,137767454	247,323623693	304,847719237	376,516077706	465,820186392
33	179,800315336	222,251544199	275,529222299	342,429445546	426,463167807	532,035012487
34	196,982343716	245,476698619	306,837436752	384,520979011	482,903379622	607,519914235
35	215,710754650	271,024368481	341,589554795	431,663496493	546,680818973	693,572702228
36	236,124722569	299,126805329	380,164405823	484,463116072	618,749325440	791,672880540
37	258,375947600	330,039485862	422,982490463	543,598690000	700,186737747	903,507083815
38	282,629782884	364,043434448	470,510564414	609,830532800	792,211013654	1,030,998075550
39	309,066463343	401,447777893	523,266726500	684,010196736	896,198445429	1,176,337806126
40	337,882445044	442,592555682	581,826066415	767,091420345	1,013,704243335	1,342,025098984
41	369,291865098	487,851811250	646,826933720	860,142390786	1,146,485794968	1,530,908612842
42	403,528132957	537,636992375	718,977896429	964,359477680	1,296,528948314	1,746,235818640
43	440,845664923	592,400691612	799,065465037	1,081,082615002	1,466,077711595	1,991,708833249
44	481,521774766	652,640760774	887,962666191	1,211,812528802	1,657,667814102	2,271,548069904
45	525,858734495	718,904836851	986,638559472	1,358,230032259	1,874,164629936	2,590,564799691
46	574,186020600	791,795320536	1,096,168801013	1,522,217636130	2,118,806031827	2,954,243871648
47	626,862762454	871,974852590	1,217,747369125	1,705,883752465	2,395,250815965	3,368,838013678
48	684,280411075	960,172337849	1,352,699579729	1,911,589802761	2,707,633422040	3,841,475335593
49	746,865648072	1,057,189571634	1,502,496533499	2,141,980579092	3,060,625766905	4,380,281882576
50	815,083556398	1,163,908528797	1,668,771152184	2,400,018248583	3,459,507116603	4,994,521346137

Tabla 6

Valor actual de una anualidad de \$/. 1 (amortización) $A = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$

Ejemplo: $n = 20$ $i = 12\%$ $A = 1 \left[\frac{1 - (1 + 0,12)^{-20}}{0,12} \right] = 7,469443624$

<i>n</i>	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	0,917431193	0,909090909	0,900900901	0,892857143	0,884955572	0,877192982
2	1,759111186	1,735537190	1,712523334	1,690051020	1,668102436	1,646660511
3	2,531294666	2,486851991	2,443714715	2,401831268	2,361152598	2,321632027
4	3,239719877	3,169865446	3,102445690	3,037349347	2,974471326	2,913712304
5	3,889651263	3,790786769	3,695897018	3,604776202	3,517231262	3,433080969
6	4,485918590	4,355260699	4,230537854	4,111407324	3,997549789	3,888667517
7	5,032952835	4,868418818	4,712196265	4,563756539	4,422610433	4,288304839
8	5,534819115	5,334926198	5,146122761	4,967639767	4,798770294	4,638863894
9	5,995246894	5,759023816	5,537047532	5,328249792	5,131655128	4,946371837
10	6,417657701	6,144567106	5,889232011	5,650223028	5,426243476	5,216115646
11	6,805190552	6,495061005	6,206515325	5,937699133	5,686941129	5,452733023
12	7,160725277	6,813691823	6,492356149	6,194374225	5,917647017	5,660292125
13	7,486903924	7,103356203	6,749870404	6,423548416	6,121811519	5,842361514
14	7,786150389	7,366687457	6,981865229	6,628168228	6,302488070	6,002071503
15	8,060688430	7,606079506	7,190869576	6,810864489	6,462378823	6,142167985
16	8,312558193	7,823708642	7,379161780	6,973986151	6,603875065	6,265059636
17	8,543631369	8,021553311	7,548794396	7,119630492	6,729092978	6,372859330
18	8,755625109	8,201412101	7,701616573	7,249670082	6,839905290	6,467420465
19	8,950114779	8,364920092	7,839294210	7,365776859	6,937969283	6,550368829
20	9,128545669	8,513563720	7,963328117	7,469443624	7,024751578	6,623130552
21	9,292243733	8,648694291	8,075070376	7,562003236	7,101550069	6,686956624
22	9,442425443	8,771540264	8,175739077	7,644645746	7,169513335	6,742944407
23	9,580206829	8,883218422	8,266431601	7,718433702	7,229657819	6,792056498
24	9,706611769	8,984744020	8,348136578	7,784315806	7,282883026	6,835137279
25	9,822579605	9,077040018	8,421744665	7,843139112	7,329984978	6,872927437
26	9,928972115	9,160945471	8,488058256	7,895659921	7,371668123	6,906076699
27	10,026579922	9,237223156	8,547800231	7,942553501	7,408555861	6,935154999
28	10,116128369	9,306566505	8,601621830	7,984422769	7,441199877	6,960662280
29	10,198282907	9,369605914	8,650109757	8,021806044	7,470080306	6,980303708
30	10,273654043	9,426914467	8,693792573	8,055183968	7,495653439	7,002664112
31	10,342801874	9,479013152	8,733146463	8,084985685	7,518277380	7,019880800
32	10,406240252	9,526375593	8,768600417	8,111594362	7,538298566	7,034983158
33	10,464440598	9,569432357	8,800540916	8,135352109	7,556016430	7,048230840
34	10,517835411	9,608574870	8,829316141	8,156564383	7,571695956	7,059851614
35	10,566821478	9,644158973	8,855239766	8,175503913	7,585571643	7,070045276
36	10,611762824	9,676508157	8,878594384	8,192414208	7,597851011	7,078987084
37	10,652993416	9,705916506	8,899634580	8,207512686	7,608717709	7,086830775
38	10,690819648	9,732651369	8,918589712	8,220993470	7,618334256	7,093711207
39	10,725522613	9,756955790	8,935666407	8,233029884	7,626844474	7,099746672
40	10,757360195	9,779050718	8,951050817	8,243776682	7,634375641	7,105040941
41	10,786568986	9,799137017	8,964910646	8,253372037	7,641040390	7,109685036
42	10,813366043	9,817397288	8,977396978	8,261939319	7,646938398	7,113758803
43	10,837950498	9,833997535	8,988645927	8,269588678	7,652157875	7,117332284
44	10,860505044	9,849088668	8,998780114	8,276418462	7,656776880	7,120466915
45	10,881197288	9,862807880	9,007910013	8,282516484	7,660864496	7,123216592
46	10,900180998	9,875279891	9,016135147	8,287961147	7,664481855	7,125628590
47	10,917597246	9,886618082	9,023545177	8,292822452	7,667683057	7,127744377
48	10,933575455	9,896925530	9,030220880	8,297162904	7,670515980	7,129600331
49	10,948234362	9,906295936	9,036235027	8,301038307	7,673022991	7,131228360
50	10,961682901	9,914814487	9,041653178	8,304498488	7,675241585	7,132656456

Tabla 7

$$\text{Depósito periódico (R) de una anualidad } R = \frac{1}{\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}}$$

$$\text{Ejemplo: } n = 20 \quad i = 12\% \quad R = \frac{1}{\frac{[(1+0,12)^{20} - 1]}{0,12}} = 0,013878780$$

n	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
2	0,478468900	0,476190476	0,473933649	0,471698113	0,469483568	0,467289720
3	0,305054757	0,302114804	0,299213070	0,296348981	0,293521970	0,290731480
4	0,218668662	0,215470804	0,212326352	0,209234436	0,206194197	0,203204783
5	0,167092457	0,163797481	0,160570310	0,157409732	0,154314543	0,151283546
6	0,132919783	0,129607380	0,126376564	0,123225718	0,120153232	0,117157496
7	0,108690517	0,105405500	0,102215269	0,099117736	0,096110804	0,093192377
8	0,090674378	0,087444018	0,084321054	0,081302841	0,078386720	0,075570024
9	0,076798802	0,073640539	0,070601664	0,067678889	0,064868902	0,062168384
10	0,065820090	0,062745395	0,059801427	0,056984164	0,054289556	0,051713541
11	0,056946657	0,053963142	0,051121007	0,048415404	0,045841455	0,043394271
12	0,049650658	0,046763315	0,044027286	0,041436808	0,038986085	0,036669327
13	0,043566660	0,040778524	0,038150993	0,035677195	0,033350341	0,031163663
14	0,038433173	0,035746223	0,033228202	0,030871246	0,028667496	0,026609145
15	0,034058883	0,031473777	0,029065240	0,026824240	0,024741780	0,022808963
16	0,030299910	0,027816621	0,025516747	0,023390018	0,021426244	0,019615400
17	0,027046248	0,024664134	0,022471485	0,020456728	0,018608439	0,016915436
18	0,024212291	0,021930222	0,019842870	0,017937311	0,016200855	0,014621152
19	0,021730411	0,019546868	0,017562504	0,015763005	0,014134394	0,012631159
20	0,019546475	0,017459625	0,015575637	0,013878780	0,012353788	0,010986002
21	0,017616635	0,015624390	0,013837930	0,012240092	0,010814328	0,009544861
22	0,015904993	0,014005063	0,012313101	0,010810509	0,009479481	0,008303165
23	0,014381880	0,012571813	0,010971182	0,009559965	0,008319133	0,007230813
24	0,013022561	0,011299776	0,009787211	0,008463442	0,007308261	0,006302841
25	0,011806251	0,010168072	0,008740242	0,007499970	0,006425928	0,005498408
26	0,010715360	0,009159039	0,007812575	0,006651858	0,005654506	0,004800014
27	0,009734905	0,008257642	0,006989164	0,005904094	0,004979073	0,004192884
28	0,008852047	0,007451013	0,006257145	0,005243869	0,004386929	0,003664490
29	0,008055723	0,006728075	0,005605470	0,004660207	0,003867225	0,003204166
30	0,007336351	0,006079248	0,005024598	0,004143658	0,003410650	0,002802794
31	0,006685600	0,005496214	0,004506267	0,003686057	0,003009192	0,002452561
32	0,006096186	0,004971717	0,004043285	0,003280326	0,002655929	0,002146751
33	0,005561726	0,004499406	0,003629379	0,002920310	0,002344868	0,001879576
34	0,005076597	0,004073706	0,003259055	0,002600638	0,002070808	0,001646037
35	0,004635837	0,003689705	0,002927490	0,002316619	0,001829221	0,001441810
36	0,004235050	0,003343064	0,002630441	0,002064141	0,001616163	0,001263148
37	0,003870329	0,003029940	0,002364164	0,001839592	0,001428190	0,001106798
38	0,003538198	0,002746925	0,002125351	0,001639800	0,001262290	0,000969934
39	0,003235550	0,002490984	0,001911071	0,001461967	0,001115824	0,000850096
40	0,002959609	0,002259414	0,001718727	0,001303626	0,000986481	0,000745143
41	0,002707885	0,002049803	0,001546009	0,001162598	0,000872231	0,000653207
42	0,002478142	0,001859991	0,001390863	0,001036958	0,000771290	0,000572660
43	0,002268368	0,001688047	0,001251462	0,000924999	0,000682092	0,000502081
44	0,002076749	0,001532237	0,001126173	0,000825210	0,000603257	0,000440228
45	0,001901651	0,001391005	0,001013542	0,000736252	0,000533571	0,000386016
46	0,001741596	0,001262953	0,000912268	0,000656936	0,000471964	0,000338496
47	0,001595245	0,001146822	0,000821188	0,000586206	0,000417493	0,000296838
48	0,001461389	0,001041480	0,000739262	0,000523125	0,000369326	0,000260317
49	0,001338929	0,000945904	0,000665559	0,000466858	0,000326731	0,000228296
50	0,001226868	0,000859174	0,000599243	0,000416663	0,000289059	0,000200219

Tabla 8

$$\text{Pago periódico (R) de una anualidad } R = \frac{1}{\frac{[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}}$$

$$\text{Ejemplo: } n = 20 \quad i = 12\% \quad R = \frac{1}{\frac{[1 - (1 + 0,12)^{-20}]}{0,12}} = 0,0133878780$$

n	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	1,090000000	1,100000000	1,110000000	1,120000000	1,130000000	1,140000000
2	0,568468900	0,576190476	0,583933649	0,591698113	0,599483568	0,607289720
3	0,395054757	0,402114804	0,409213070	0,416348981	0,423521970	0,430731480
4	0,308668662	0,315470804	0,322326352	0,329234436	0,336194197	0,343204783
5	0,257092457	0,263797481	0,270570310	0,277409732	0,284314543	0,291283546
6	0,222919783	0,229607380	0,236376564	0,243225718	0,250153232	0,257157496
7	0,198690517	0,205405500	0,212215269	0,219117736	0,226110804	0,233192377
8	0,180674378	0,187444018	0,194321054	0,201302841	0,208386720	0,215570024
9	0,166798802	0,173640539	0,180601664	0,187678889	0,194868902	0,202168384
10	0,155820090	0,162745395	0,169801427	0,176984164	0,184289556	0,191713541
11	0,146946657	0,153963142	0,161121007	0,168415404	0,175841455	0,183394271
12	0,139650658	0,146763315	0,154027286	0,161436808	0,168986085	0,176669327
13	0,133566560	0,140778524	0,148150993	0,155677195	0,163350341	0,171163663
14	0,128433173	0,135746223	0,143228202	0,150871246	0,158667496	0,166609145
15	0,124058883	0,131473777	0,139065240	0,146824240	0,154741780	0,162808963
16	0,120299910	0,127816621	0,135516747	0,143390018	0,151426244	0,159615400
17	0,117046248	0,124664134	0,132471485	0,140456728	0,148608439	0,156915436
18	0,114212291	0,121930222	0,129842870	0,137937311	0,146200855	0,154621152
19	0,111730411	0,119546868	0,127562504	0,135763005	0,144134394	0,152663159
20	0,109546475	0,117459625	0,125575637	0,133878780	0,142353788	0,150986002
21	0,107616635	0,115624390	0,123837930	0,132240092	0,140814328	0,149544861
22	0,105904993	0,114005063	0,122313101	0,130810509	0,139479481	0,148303165
23	0,104381880	0,112571813	0,120971182	0,129559965	0,138319133	0,147230813
24	0,103022561	0,111299776	0,119787211	0,128463442	0,137308261	0,146302841
25	0,101806251	0,110168072	0,118740242	0,127499970	0,136425928	0,145498408
26	0,100715360	0,109159039	0,117812575	0,126651858	0,135654506	0,144800014
27	0,099734905	0,108257642	0,116989164	0,125904094	0,134979073	0,144192884
28	0,098852047	0,107451013	0,116257145	0,125243869	0,134386929	0,143664490
29	0,098055723	0,106728075	0,115605470	0,124660207	0,133867225	0,143204166
30	0,097336351	0,106079248	0,115024598	0,124143658	0,133410650	0,142802794
31	0,096685600	0,105496214	0,114506267	0,123686057	0,133009192	0,142452561
32	0,096096186	0,104971717	0,114043285	0,123280326	0,132655929	0,142146751
33	0,095561726	0,104499406	0,113629379	0,122920310	0,132344868	0,141879576
34	0,095076597	0,104073706	0,113259055	0,122600638	0,132070808	0,141646037
35	0,094635837	0,103689705	0,112927490	0,122316619	0,131829221	0,141441810
36	0,094235050	0,103343064	0,112630441	0,122064141	0,131616163	0,141263148
37	0,093870329	0,103029940	0,112364164	0,121839592	0,131428190	0,141106798
38	0,093538198	0,102746925	0,112125351	0,121639800	0,131262290	0,140969934
39	0,093235550	0,102490984	0,111911071	0,121461967	0,131115824	0,140850096
40	0,092959609	0,102259414	0,111718727	0,121303626	0,130986481	0,140745143
41	0,092707885	0,102049803	0,111546009	0,121162598	0,130872231	0,140653207
42	0,092478142	0,101859991	0,111390863	0,121036958	0,130771290	0,140572660
43	0,092266866	0,101688047	0,111251462	0,120924999	0,130682092	0,140502081
44	0,092076749	0,101532237	0,111126173	0,120825210	0,130603257	0,140440228
45	0,091901651	0,101391005	0,111013542	0,120736252	0,130533571	0,140386016
46	0,091741596	0,101262953	0,110912268	0,120656936	0,130471964	0,140338496
47	0,091595245	0,101146822	0,110821188	0,120586206	0,130417493	0,140296838
48	0,091461389	0,101041480	0,110739262	0,120523125	0,130369326	0,140260317
49	0,091338929	0,100945904	0,110665559	0,120466858	0,130326731	0,140228296
50	0,091226868	0,100859174	0,110599243	0,120416663	0,130289059	0,140200219

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez A., Alberto A. *Matemáticas financieras*. Ed. McGraw-Hill. Santafé de Bogotá, Colombia, 1995.
- Ayres, Frank Jr. *Matemáticas financieras. Teoría y 500 problemas resueltos*. 1a. ed.. Ed. McGraw-Hill. Santafé de Bogotá, Colombia, 1970.
- Bolsa de Valores de Quito. Guía del inversionista bursátil. Quito-Ecuador, 1992.
- Brigham, Eugene F. y Gapenski, Louis C. *Financial Management, Theory and Practice*. Fifth Edition. Ed. The Dryden Press. USA, 1988.
- Boter F., Mauri. *Precio de coste industrial*. 4a. ed. Ed. Juventud. Provenza-Barcelona, 1950.
- Cissell, Robert y Cissell, Helen. *Matemáticas financieras*. 1a. ed. en español, Ed. Compañía Editorial Continental S. A. México, 1978.
- Cobo, Hernán. Gestión financiera de control y sistemas. Tesis de grado, facultad de ciencias administrativas, Universidad Central del Ecuador. Quito-Ecuador, 1978.
- Colli Bernand, J. C. y D. Lewandowski. *Diccionario Económico-Financiero*. 3a. ed. Ed. Asociación para el Progreso de la Dirección. Madrid, 1981.
- Dávalos A., Nelson. *Enciclopedia básica de administración, contabilidad y auditoría*. 1a. ed. Ed. Ecuador, Quito-Ecuador, 1981.
- De la Cueva G., Benjamín. *Matemáticas financieras*. 2a. ed. Ed. Universidad Autónoma de México, 1971.
- Días Mosto, Jorge. *Matemática financiera y aplicaciones de contabilidad*. 3a. ed. Ed. Biblioteca de Contabilidad y Matemáticas Afines Editorial Universo S. A. Lima, Perú, 1979.
- Fondo Monetario Internacional. *Informe anual 1981*. Washington D.C. Ed. Fondo Monetario Internacional, agosto de 1981.
- Infante Villarreal, Arturo. *Evaluación económica de proyectos de inversión*. 4a. ed. Ed. Biblioteca Banco Popular. Textos Universitarios. Cali, Colombia, 1979.
- Lanyi, Anthony y Rusdu Saracoglu. "La importancia de las tasas de interés en economías en desarrollo". *Revista Finanzas y Desarrollo*, publicación trimestral del Fondo Monetario Internacional y del Banco Mundial. Washington D.C., junio de 1983. Vol. 20, No. 2.
- Lerner, Joel J. y Zima, Peter. *Theory and Problems of Business Mathematics*. Shaum's Outline Senes. McGraw-Hill, Inc. San Francisco, USA, 1985.
- Ley general de instituciones del Sistema Financiero. Registro oficial 439, suplemento, 12 de mayo de 1994. Quito Ecuador.

- Ley de mercado de valores. Registro Oficial 199 de 28 de mayo de 1993. Quito, Ecuador.
- Locke, Flora M. *Matemáticas comerciales. Texto programado*. 1a. ed. Ed. Limusa. México, 1975.
- Magee, John E. *Seguros generales*. 2a. ed. Ed. Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana (Uteha) México, 1947.
- Meier & Archer. *An Introduction To Mathematics For Business Analysis*. 1a. ed. Ed. McGraw-Hill Book Company Inc. Nueva York, 1960.
- Moore H., Justin. *Manual de matemáticas financieras*. Reimpresión, Ed. Unión Tipográfica Editorial Hispano América. México, 1973.
- Mora Zambrano, Armando. *Texto de matemática financiera*. Instituto de Estudios Administrativos. Universidad Central del Ecuador. Quito, 1995.
- N.A.A. RESEARCH REPORT. *Selección y planificación de inversiones*. Ed. Ibérico Europea de Ediciones S.A. Madrid, 1968.
- Naranjo Toro, Manuel. *Auditoría*. Ed. Instituto de Estudios Administrativos. Universidad Central del Ecuador. Quito, Ecuador 1968.
- Ortells, Alfredo. *Gran diccionario enciclopédico universal*, 10 tomos. Ed. Alfredo Ortells. Valencia, España, 1980.
- Portus Govinden, Lincoyán. *Matemáticas financieras* 1a. ed. Ed. Libros McGraw-Hill. Santafé de Bogotá, Colombia, 1975.
- Rich, Barnett. *Álgebra elemental. 2.700 problemas resueltos y 3.000 problemas suplementarios*. 2a. ed. Ed. McGraw-Hill. Colombia, 1969.
- Romero Miño, Luis A. *Matemática financiera*. 1a. ed. Ed. Northwood. Institute Division. Quito, Ecuador, 1971.
- Santillana y varios autores. *Enciclopedia básica de matemática moderna*, 4 tomos. Ed. Santillana. Madrid, España, 1972.
- Selby M., Samuel. *Standard Mathematical Tables*. 19a. ed. Ed. The Chemical Rubber Co. Cleveland, Ohio, 1971.
- Seldon, Arthur y F. G. Pennance. *Diccionario de economía*. 1a. ed. Ed. Oikostan, S.A. Ediciones. Barcelona-España, 1987.
- Sevilla, Joel Michel y Robert, Souvegrain. *Tópicos de matemáticas para administradores y economistas*. 1a. ed. Ed. Trillas. México, 1976.
- Superintendencia de Bancos. *Catálogos de cuentas del Libro Mayor de las Asociaciones, Mutualistas de Ahorro y Crédito*. 1a. ed. Ed. Superintendencia de Bancos. Quito, Ecuador, 1979.
- Torija Torres, Manuel. *Manual de matemáticas mercantiles*. Segunda reimpresión. Ed. Trillas. México, septiembre de 1976.
- Vega, Celio. *Ingeniería económica*. Ed. Gráficas Mediavilla Hnos. Quito, Ecuador, 1983.
- Venegas L., Rodríguez S. y S. A. Mora. *"Solucionario de problemas propuestos de matemática financiera de Frank Ayres Jr."* Inédito. Quito, Ecuador, 1983.
- Weston J., Fred y F. Eugene, Brigham. *Managerial Finance*. 3a. ed. Ed. Holt Rinehart and Winston. Nueva York, 1969.

