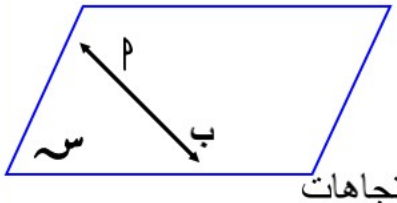
الدرس الأول

المستقيمات والمستويات فى الفراغ

مفاهيم ومسلمات هندسية

١) الخط المستقيم :

هو مجموعة غير منتهية من النقط على استقامة واحدة ويتحدد تحديداً تاماً بمعلومية نقطتين مختلفتين عليه



٢) المستوى

هو سطح مكون من مجموعة غير منتهية من النقاط ليست على استقامة واحده بعض مجموعاته الجزئية مستقيمة

هو مجموعة غير منتهية من النقط ينطبق عليها المستقيم في جميع الإتجاهات

بمعنى أنه إذا كانت النقطتان م ، ب ∈ س ، فإن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ⊂ س بحيث أن :

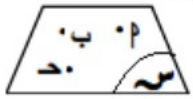
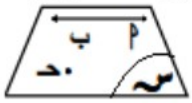
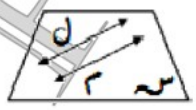
$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ س = $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

ملاحظة :

يمثل المستوى الممتد من جميع جهاته بجزء محدود منه على شكل مثلث أو على شكل رباعي أو أي أن المستوى لا أول له ولا أخر له من جميع جهاته

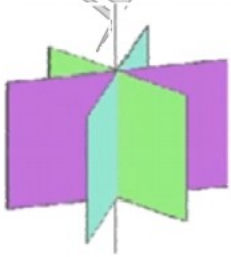
الفراغ :

هو مجموعة غير منتهية من النقط وهو الذي يحتوي جميع الأجسام والمستويات والمستقيمات و الأشكال الهندسية ونرمز له بالرمز (ف) وهذه الأجسام و المجسمات كل منها عبارة عن مجموعة جزئية من الفراغ وبذلك يكون الفراغ هو بمثابة المجموعة الشاملة التي نتحدث في إطارها طالما كان حديثنا منصبا على مجموعة النقط .

تعيين المستوى فى الفراغ يتعين المستوى فى الفراغ بإحدى الحالات الآتية			
١) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة	٢) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه	٣) مستقيمان متقاطعان	٤) مستقيمان متوازيان غير منطبقان
فى الشكل المقابل النقط م ، ب ، جـ ليست على استقامه واحدة لذلك يتعين المستوى س 	فى الشكل المقابل جـ ∉ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ولذلك يتعين المستوى س 	فى الشكل المقابل ل ∩ م = { م } ولذلك يتعين المستوى س	فى الشكل المقابل ل // م ولذلك يتعين المستوى س 

ملحوظة :

- أى نقطة يمر بها عدد لانهائى من المستقيمات
- أى نقطة يمر بها عدد لانهائى من المستويات
- أى نقطتين يمر بهما مستقيم واحد
- أى نقطتين " مستقيم " يمر بهما عدد لانهائى من المستويات



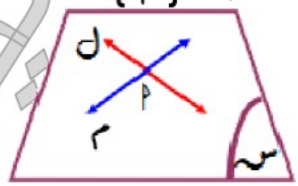
الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ :-

١) الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين فى الفراغ

المستقيمان المتقاطعان

هما مستقيمان يقعان فى نفس المتسوى ومشتركان فى نقطة واحدة .

ل ∩ م = { أ }

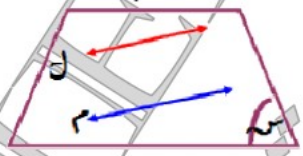


المستقيمان المتوازيان

هما مستقيمان يقعان فى نفس المتسوى ولا يشتركان أى فى نقطة .

ل // م

ل ∩ م = ∅

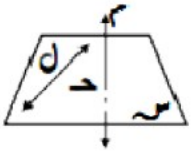


المستقيمان المتخالفان

هما مستقيمان لا يقعان فى نفس المتسوى .

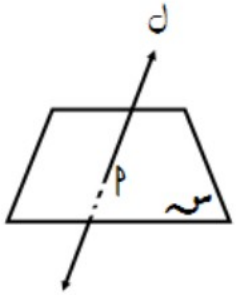
ل ∩ م = ∅

ل ، م لا يجمعهما مستوى واحد



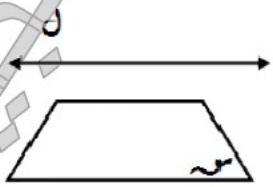
٢) الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى فى الفراغ

المستقيم قاطع للمستوى



ل ∩ س = { أ }

المستقيم موازى للمستوى



ل // س

ل ∩ س = ∅

المستقيم يقع بتمامه فى المستوى

ل ∩ س = ل

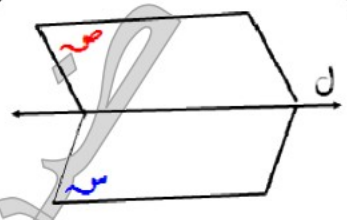
ل ⊂ س

ملحوظة :

- المستقيمان المتخالفان غير متوازيان وغير متقاطعان و لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد
- إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى

٣) الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ

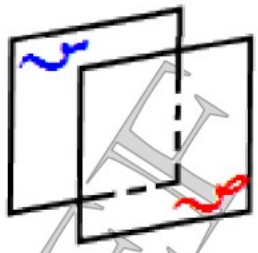
المستويان المتقاطعان



المستويان يتقاطعان فى مستقيم

س ∩ ص = ل

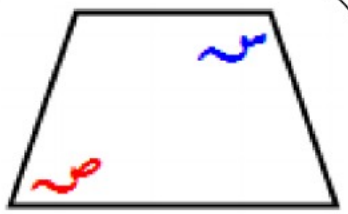
المستويان المتوازيان



س ∩ ص = ∅

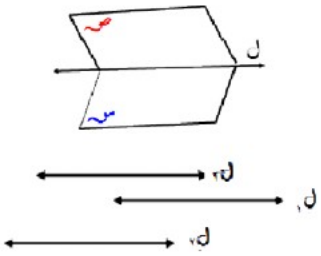
س // ص

المستويان المتخالفان



س ∩ ص = س = ص

ملاحظات

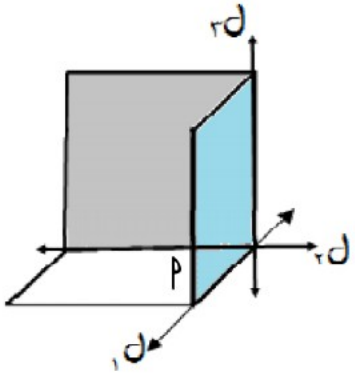


- ✓ إذا اشتركا مستويان مختلفين فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة .
- ✓ المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

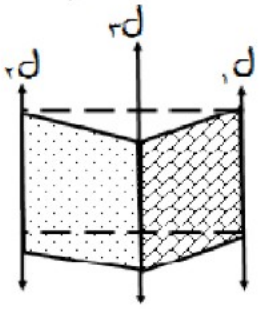
لأى ثلاث مستقيمات ل١ ، ل٢ ، ل٣ فى الفراغ

إذا كان ل١ // ل٢ ، ل٢ // ل٣ فإن ل١ // ل٢ // ل٣

- ✓ المستقيمات الرأسية فى الفراغ جميعها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المتستقيمات الأفقية متوازية .
- ✓ إذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطرى الشكل الرباعى فى نقطة واحدة فإن أضلاعه تقع جميعا فى مستوى واحد .
- ✓ إذا تقاطعت ثلاث مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون متوازية أو تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة .



ل١ ∩ ل٢ ∩ ل٣ = {أ}

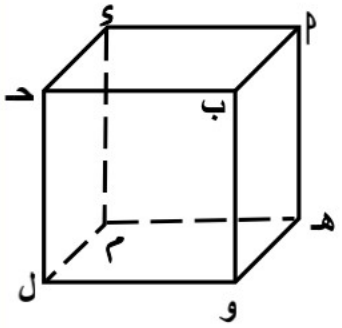


ل١ // ل٢ // ل٣

تدريب ١) :

فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء هـ و ل م مكعب

أولا :أكمل ما يأتى :



(١) أ ب ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ...

( ) أ ب ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ = ...

(٣) ب و // $\overleftrightarrow{\text{.....}}$ // ..... // .....

(٤) المستوى ب حـ ل و // المستوى .....

(٥) المستوى ب حـ ل و ∩ المستوى ء حـ ل م = ...

(٦) المستقيمان أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{.....}}$ متخالفان

(٧) ق (ب $\widehat{\text{أ}}$ هـ) = ...°

(٨) أ ب // $\overleftrightarrow{\text{المستوى}}$ .....

ثانياً : اذكر أزواج المستقيمات المتخالفة

ثالثاً : (١) اكتب ثلاث مستقيمات تمر بالنقطة أ (٢) اكتب المستقمات التى تمر بالنقطتين أ ، ء معاً

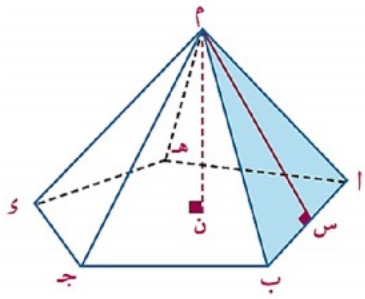
(٢) اكتب ثلاث مستويات تمر بالنقطة ب (٤) اكتب ثلاث مستويات تمر بالنقطتين أ ، ء معاً

تدريب ٢) :

١) المستقيمان المتقاطعان هما مستقيمان يقعان في ..... واحد ويشتركان في .....
٢) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لايمكن أن يحتويهما .....
٣) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا ..... أو .....
٤) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة واحدة .....
٥) إذا كان ل ، م يقعان في نفس المستوى ، ل ∩ م = ∅ ، فإن ل ، م .....
٦) إذا كان س ، ص مستويان حيث س ∩ ص = ∅ فإن س ..... ص
٧) إذا كان المستقيم ل لايوازى المستوى س ، ولا يقطعه في نقطة فإن المستقيم ل ..... المستوى س
٨) إذا كان المستوى س يوازى المستوى ص ، والمستقيم ل ⊂ س فإن ل ..... ص
٩) عدد المستويات التى تمر بمستقيم .....
١٠) يتعين المستوى ..... ، ..... ، ..... ، .....

الدرس الثانى

الهرم



الهرم

الهرم : هو مجسم له قاعدة واحدة ، وجميع أوجهة الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة لا تنتمى إلى هذه القاعدة . ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته

خواص الهرم :

(١) الأوجه الجانبية للهرم سطوح مثلثات عدد يساوى عدد أضلاع قاعدته .

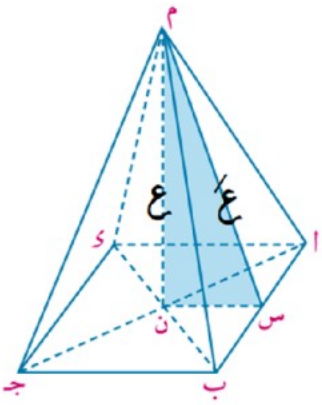
(٢) ارتفاع الهرم : هو العمود النازل من رأس الهرم على مستوى قاعدته .

(٣) ارتفاع الهرم الجانبى (ارتفاع الوجه) : هو العمود النازل من رأس الهرم على قاعدة هذا الوجه .

أنواع الهرم

(أ) **الهرم المنتظم** : هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها .

خواص الهرم المنتظم :



هرم رباعى منتظم

(١) أحرفه الجانبية متساوية في الطول .

(٢) أوجهة الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

(٣) الارتفاعات الجانبية متساوية في الطول .

(٤) ارتفاع الهرم يمر بالمركز الهندسى لقاعدته .

لاحظ : المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عمودى على أى مستقيم فيها (انظر الشكل المقابل)

تـذكـر أن :

- المضلع المنتظم هو كثير أضلاع أضلاعه متساوية في الطول وزواياه متساوية في القياس ، ومركزه الهندسى هو مركز الدائرة الخارجة له أو الداخلة له .
- مساحة سطح المضلع المنتظم الذى طول ضلعه ل ، وعدد أضلاعه ن = $\frac{ن}{٤}$ ل^{٢} طتا $\left(\frac{١٨٠}{ن}\right)$

(ب) **الهرم القائم** : يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى

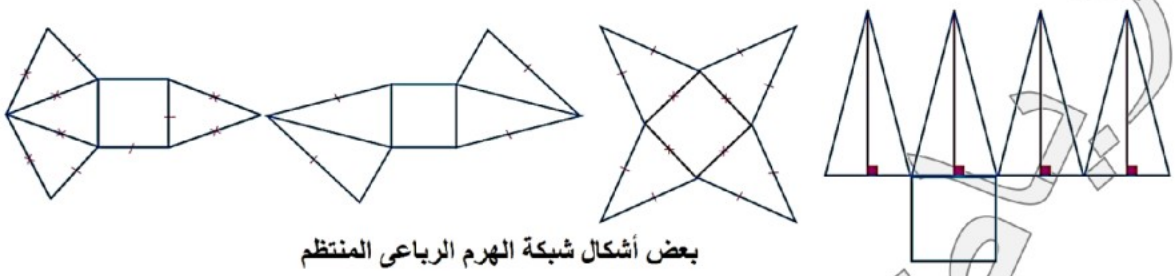
مـلاحظـات :

- كل هرم منتظم هو هرم قائم وليس كل هرم قائم هو هرم منتظم .
- كل هرم قائم قاعدته مضلع منتظم يكون هرمًا منتظمًا .

(ج) **الهرم الثلاثى منتظم الوجوه** : يسمى الهرم الثلاثى المنتظم هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه إذا كانت جميع أوجهة مثلثات متساوية الأضلاع . ويمكن اعتبار أى منها قاعدة له .

شبكة المجسم : هى مساحة الشكل الذى يمكن طيه كاملًا لتكوين مجسمًا كاملًا ، وهى ليست واحدة للجسم الواحد ، وهى مساحة ثابتة مهما تعددت صور الشبكة .

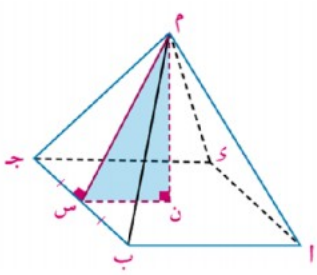
شبكة الهرم :



بعض أشكال شبكة الهرم الرباعى المنتظم

مثال (١) م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٢سم ، وارتفاعه ٨ سم. أوجد ارتفاعه الجانبى

الحـــــــل



∵ الهرم رباعى منتظم ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

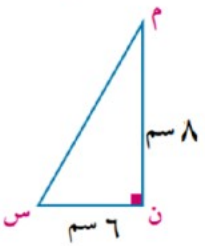
(ن نقطة تقاطع قطرى المربع أ ب جـ ء)

وبفرض س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (خواص المثلث المتساوى الساقين)

∴ $\overline{\text{م س}}$ هو ارتفاع جانبى للهرم.

فى △ ء ب جـ ∵ ن منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ن س = ٠,٥ طول ضلع المربع = ٠,٥ × ١٢ = ٦ سم



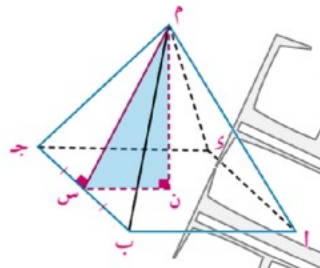
∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ∴ △ م ن س قائم الزاوية فى ن .

∴ $(\text{م س})^2 = (\text{م ن})^2 + (\text{ن س})^2 = (٨)^2 + (٦)^2 = ١٠٠$

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٠ سم

مثال (٢) م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم ارتفاعه الجانبى ٢٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم . أوجد طول ضلع قاعدته

الحـــــــل



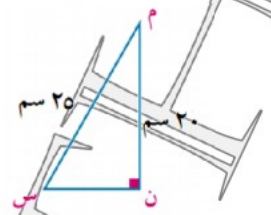
∵ الهرم رباعى منتظم ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

وبفرض س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (خواص المثلث المتساوى الساقين)

∴ $\overline{\text{م س}}$ هو ارتفاع جانبى للهرم .

فى △ ء ب جـ ∵ ن منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ∴ △ م ن س قائم الزاوية فى ن .



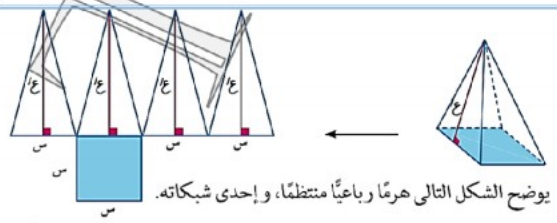
∴ $(\text{ن س})^2 = (\text{م س})^2 - (\text{ن م})^2 = (٢٥)^2 - (٢٠)^2 = ٢٢٥$

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ٣٠ سم

استنتاج المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم :

لاحظ أن : الأوجهة الجانبية مثلثات متساوية الساقين

ومتطابقة الارتفاعات الجانبية لها متساوية وكل منها = ع/



يوضح الشكل التالى هرمًا رباعيًا منتظمًا، و إحدى شبكاته.

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

قاعدة الهرم مضلع منتظم طول ضلعه = س ويكون :

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجهة الجانبية =

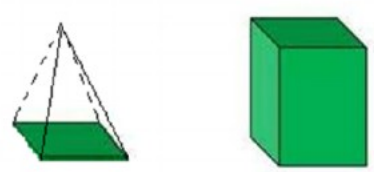
$\frac{1}{2}$ س × ع′ + $\frac{1}{2}$ س × ع′ + $\frac{1}{2}$ س × ع′ + $\frac{1}{2}$ س × ع′ =

$\frac{1}{2}$ (س + س + س) × ع′ = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

استنتاج حجم الهرم المنتظم :

تجربة عملية :



احضر وعاء مفرغ على شكل منشور قائم ووعاء آخر على شكل هرم قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع

املىء الوعاء الهرم بحبات الرمل ثم فرغه فى المنشور

تلاحظ أنه بعد ثلاث مرات يمتلأ المنشور وهذا يعنى أن :

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

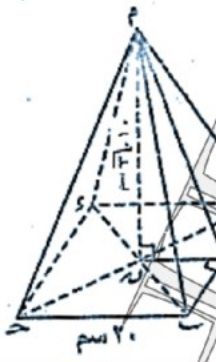
∵ حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال (٣) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{3}$ سم أوجد :

① المساحة الجانبية ② حجم الهرم

الحـــــــل



الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$ = ٢٠ سم

① المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم^2

② حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × (٢٠)^2 × ١٠ $\sqrt{3}$ = $\frac{4000}{3}$ $\sqrt{3}$ سم^3

تدريب (١) هرم رباعى منتظم طول قطر قاعدته ٢٤ $\sqrt{2}$ سم وارتفاعه الجانبى ٢٠ سم أوجد :

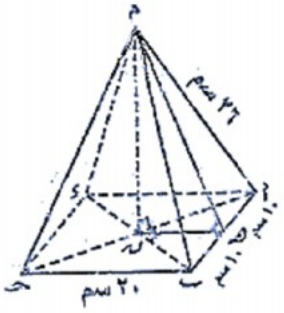
① المساحة الكلية ② حجم الهرم

Eng / Amr Tawfek Khadr T : 01005270744

مثال (٤) م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ٢٠ سم وطول حرفه الجانبى = ٢٦ سم . أوجد :

① الارتفاع الجانبى للهرم ② ارتفاع الهرم ③ المساحة الكلية للهرم ④ حجم الهرم

الحـــــــل



① فى △ م أ هـ :

م هـ = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (١٠)^٢}$ = ٢٤ سم (الارتفاع الجانبى)

② فى △ م هـ ن :

م ن = $\sqrt{(٢٤)^٢ - (١٠)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١١٩}$ سم (ارتفاع الهرم)

③ المساحة الكلية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٤ = ٩٦٠ سم^٢

④ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × (٢٠)^٢ × ٢ $\sqrt{١١٩}$ = $\frac{٨٠٠}{٣}$ $\sqrt{١١٩}$ سم^٣

مثال (٥) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم أوجد :

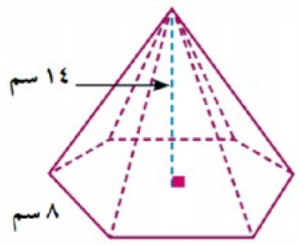
① مساحة الجانبية ② مساحته الكلية

الحـــــــل

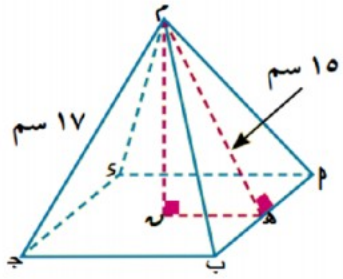
① المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٢ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = ٣٦٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢

② المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٣٦٠ $\sqrt{٣}$ + $\frac{٦}{٤}$ (١٢)^٢ طتا $\left(\frac{١٨٠}{٦}\right)$ = ٥٧٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

مثال (٦) أوجد حجم كل هرم منتظم فيما يلى مستخدما البيانات الموضحة على شكل :



الحجم = $\frac{١}{٣}$ $\left(\frac{٦}{٤} \times ٨^٢ \times \cot\frac{\pi}{٦}\right)$ × ١٤ = ٤٤٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣

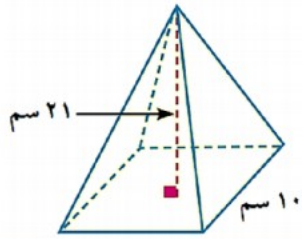


أ هـ = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٨ سم ∴ أ ب (طول الضلع) = ١٦ سم ، هـ ن = ٨ سم

، ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٥)^٢ - ٨^٢}$ = $\sqrt{١٦١}$ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الأرتفاع = $\frac{١}{٣}$ × (١٦)^٢ × $\sqrt{١٦١}$

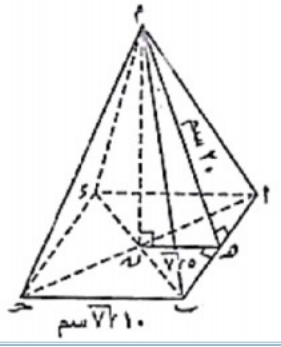
= $\frac{٢٥٦}{٣}$ $\sqrt{١٦١}$ سم^٣ ≃ ١٠٨٢,٨ سم^٣



Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

مثال (٧) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^{٢} ، وارتفاعه الجانبى ٢٠سم . أوجد حجمه .

الحـــــــل



قاعدة الهرم المنتظم مربعة مساحتها = ٧٠٠ سم^{٢}

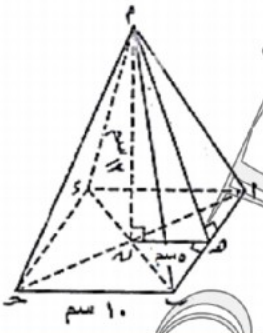
∴ طول الضلع = ١٠ √٧ سم

الارتفاع = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - (٥\sqrt{٧})^{٢}}$ = ١٥ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × (٧٠٠) × ١٥ = ٣٥٠٠ سم^{٣}

مثال (٨) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠سم^{٣} ، وارتفاعه ١٢سم احسب مساحته الجانبية .

الحـــــــل



∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ١٢ ∴ مساحة القاعدة = ١٠٠

∴ طول ضلع القاعدة = ١٠ سم

ارتفاعه الجانبى = $\sqrt{٥^{٢} + (١٢)^{٢}}$ = ١٣ سم

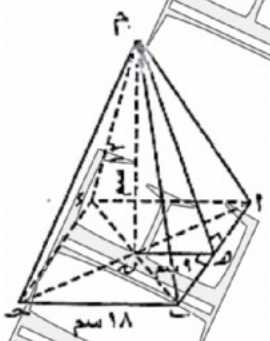
∵ مساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ = ٢٦٠ سم^{٢}

مثال (٩) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦سم^{٣} فأوجد :

ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية .

الحـــــــل



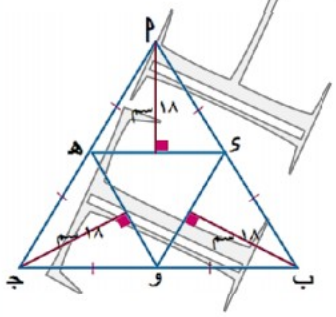
∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ١٢٩٦ = $\frac{١}{٣}$ × (١٨)^{٢} × الارتفاع ∴ ارتفاع الهرم = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبى = $\sqrt{٩^{٢} + (١٢)^{٢}}$ = ١٥ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٨) × ١٥ = ٥٤٠ سم^{٢}

مثال (١٠) باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية



الحـــــــل

بفرض أن ب و = ل ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ل ، وبالمثل ء و = هـ و = ل

∴ Δ ء هـ و متساوى الأضلاع وطول ضلعه = ل

∴ الشبكة لمجسم هرم ثلاثى منتظم الوجوه

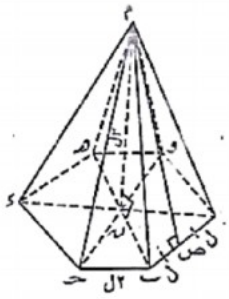
ويكون $\frac{١٨}{ل}$ = جا ٦٠° ∴ ل = ١٢ √٣ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة أى وجه فيها

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × (١٢ √٣)^{٢} جا ٦٠° = ٤٣٢ √٣ سم^{٢}

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

مثال (١١) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٢ل ، وارتفاع الهرم = ٣ل . اثبت أن :
المساحة الجانبية للهرم = ضعف مساحة قاعدته



∵ ب هـ = ب جـ = ٢ ل

∴ فى Δ م هـ ب :

م ب = $\sqrt{(٣ل)^٢ + (٢ل)^٢}$

= $\sqrt{١٣}$ ل

، فى Δ م ب ص : م ص =

$\sqrt{(\sqrt{٣}ل)^٢ - ل^٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ ل

∴ الارتفاع الجانبى = ٢ $\sqrt{٣}$ ل

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ٢ ل) × ٢ $\sqrt{٣}$ ل

= ١٢ $\sqrt{٣}$ ل^٢ سم^٢

، مساحة القاعدة = $\frac{٦}{٤}$ × (٢ ل)^٢ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

= ٦ $\sqrt{٣}$ ل^٢ سم^٢

∴ المساحة الجانبية = ٢ مساحة القاعدة

مثال (١٢) هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية = ($\sqrt{٣}$ + ١) أ .
أوجد : طول حرفه بدلالة أ .

نفرض أن طول ضلع قاعدته = طول حرفه الجانبى = ل

مساحة القاعدة = ل^٢

، ارتفاعه الجانبى

= $\frac{ل}{٢}$ $\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ل × $\frac{ل}{٢}$ $\sqrt{٣}$

= ل^٢ $\sqrt{٣}$

المساحة الكلية = ل^٢ $\sqrt{٣}$ + ل^٢ = ل^٢ ($\sqrt{٣}$ + ١)

∴ ل^٢ ($\sqrt{٣}$ + ١) = ($\sqrt{٣}$ + ١) أ

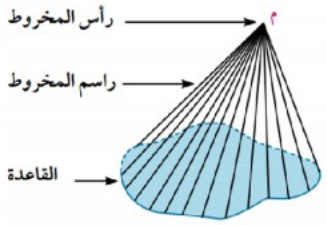
∴ ل^٢ = أ ∴ ل = $\sqrt{أ}$

∴ طول حرفه = $\sqrt{أ}$

THE BRILLIANT التجديدية

الدرس الثالث

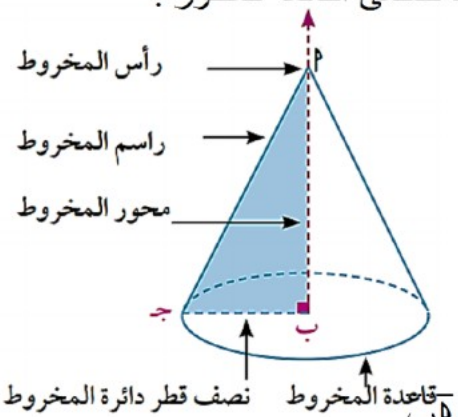
المخروط



المخروط : هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته ، والتى يُعرف كل منها براسم المخروط .

المخروط الدائرى القائم :

هو المجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور .



خواص المخروط الدائرى :

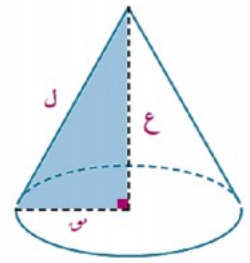
يوضح الشكل المقابل مخروطًا دائريًا قائمًا ناشئ من دوران المثلث القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول كمحور $\overleftrightarrow{أب}$ فنجد :

(١) $\overline{أجـ}$ راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة جـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول $\overline{بجـ}$ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط

(٢) $\overleftrightarrow{أب}$ محور المخروط عمودى على القاعدة ، ارتفاع المخروط أب .

مثال (١) أوجد بدلالة ط محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم ، وطول راسمه ٢٦ سم .

الحـــــــل



بفرض ارتفاع المخروط = ع ، طول راسمه = ل ، وطول نصف قطره = نق

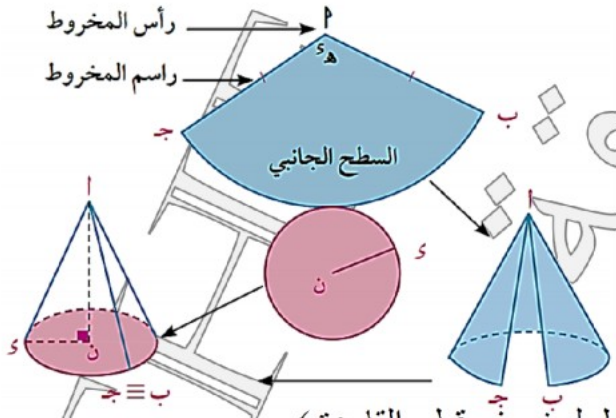
∵ $نق^٢ = ل^٢ - ع^٢$

∴ $نق^٢ = ٢٦^٢ - ٢٤^٢$ ∴ نق = ١٠ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ ط نق = ٢ ط × ١٠ = ٢٠ ط سم

∴ مساحة القاعدة = ط $نق^٢$ = ط $١٠^٢$ = ١٠٠ ط $سم^٢$

شبكة المخروط



يمكن طى شبكة المخروط القائم ؛ لتكوين عبوات مخروطية كما بالشكل المقابل

١- أب = أجـ = ل (طول راسم المخروط)

٢- القطاع الدائرى أبجـ يمثل السطح الجانبى للمخروط ، طول $\overset{\frown}{بجـ}$ = ٢ ط نق

(نق طول نصف قطر قاعدة المخروط)

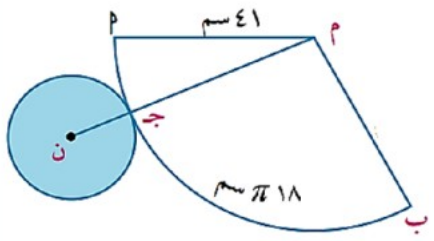
٣- ارتفاع المخروط = طول $\overline{أن}$

ملاحظات : فى القطاع الدائرى أبجـ :

١) طول $\overset{\frown}{بجـ}$ = هـ ء × م أ = ٢ ط نق (حيث نق طول نصف قطر القاعدة)

٢) مساحة سطحه = $\frac{١}{٢}$ $\overset{\frown}{بجـ}$ × م أ = $\frac{١}{٢}$ هـ ء × $(م أ)^٢$ = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × ط $نق^٢$

مثال (٢) يوضح الشكل المقابل شبكة مخروط قائم مستعينًا بالبيانات المعطاه أوجد ارتفاعه .



الحـــــــل

من شبكة المخروط نلاحظ أن :

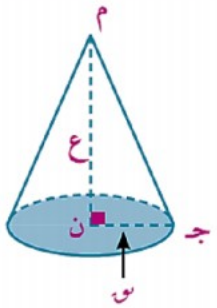
ل = طول $\overline{م م}$ = ٤١سم

محيط قاعدة المخروط = $\overset{\frown}{أب}$ = ١٨ ط سم

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $\overline{جـ ن}$ = نق

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل فيكون :

ارتفاع المخروط = $\overline{م ن}$ = ع

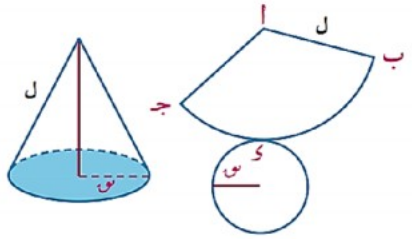


∵ ٢ ط نق = ١٨ ط ∴ نق = ٩ سم

∵ ع^{٢} = ل^{٢} − نق^{٢} ∴ ع^{٢} = (٤١)^{٢} − (٩)^{٢}

∴ ع = ٤٠ سم

استنتاج المساحة الجانبية والكلية للمخروط القائم:



من شبكة المخروط القائم نستنتج أن :

المساحة الجانبية للمخروط القائم = مساحة القطاع أب جـ

= $\frac{١}{٢}$ × طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ × أب

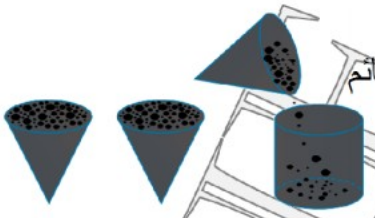
= $\frac{١}{٢}$ × محيط قاعدة المخروط × أب

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط نق × ل = ط ل نق

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ط ل نق + ط نق^{٢} = ط نق (ل + نق)

استنتاج حجم الهرم المنتظم :

تجربة عملية :



احضر وعاء مفرغ على شكل اسطوانة قائمة ووعاء آخر على شكل مخروط قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع

املىء الوعاء المخروط بحبات الرمل ثم فرغه فى الاسطوانة

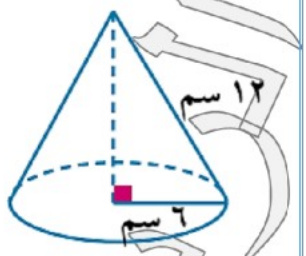
تلاحظ أنه بعد ثلاث مرات يمتلأ المنشور وهذا يعنى أن :

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الارسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

∵ حجم الالسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال (٣) أوجد المساحة الجانبية والكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاه :

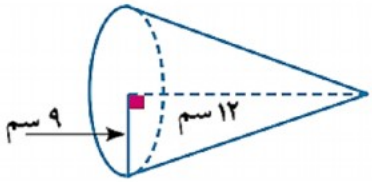


المساحة الجانبية = π (٦) × ١٢

= ٧٢ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٦) (٦ + ١٢)

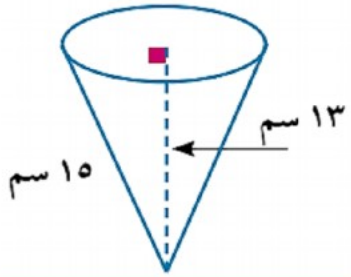
= ١٠٨ π سم^{٢}



طول الراسم (ل) = $\sqrt{(١٢)^{٢} + ٩^{٢}}$ = ١٥ سم

المساحة الجانبية = π (٩) × ١٥ = ١٣٥ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٩) (٩ + ١٥) = ٢١٦ π سم^{٢}

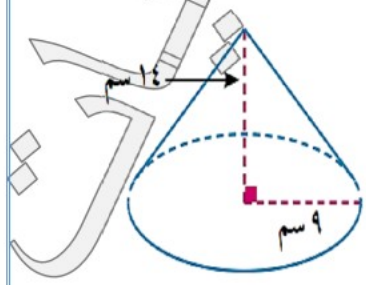


نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٤}$ سم

المساحة الجانبية = π (٢ $\sqrt{١٤}$) × ١٥

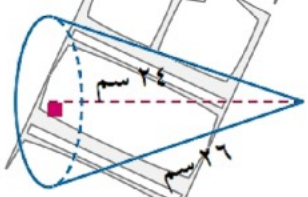
= ٣٠ $\sqrt{١٤}$ π سم^{٢}

مثال (٤) أوجد حجم لكل مخروط قائم موضح بالشكل حسب البيانات المعطاه :



الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (٩)^{٢} × ١٤

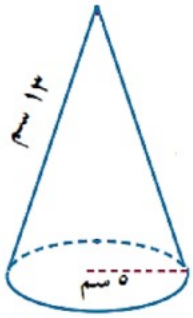
= ٣٧٨ π سم^{٣}



نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (١٠)^{٢} × ٢٤

= ٨٠٠ π سم^{٣}



الارتفاع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - ٥^{٢}}$ = ١٢ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (٥)^{٢} × ١٢

= ١٠٠ π سم^{٣}

مثال (٥) مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧سم ، ارتفاعه ١٥سم أوجد : ① مساحته الجانبية ② مساحته الكلية ③ حجمه

∴ نق = $\sqrt{ل^{٢} - ع^{٢}}$ = $\sqrt{(١٧)^{٢} - (١٥)^{٢}}$ = ٨ سم

المساحة الجانبية

= π نق ل = π (٨) × ١٧ = ١٣٦ π سم^{٢}

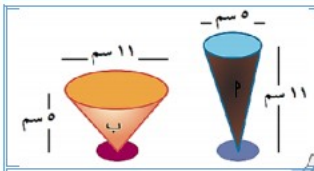
المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π (٨) (٨ + ١٧) = ٢٠٠ π سم^{٢}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٨^{٢} × (١٥) = ٣٢٠ π سم^{٣}

مثال (٦) فى الشكل المقابل:
أ ، ب كأسان للشراب أيهما سعته أكبر ؟ أوجد الفرق بين سعتيهما .



الأول (أ) :

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢}$ × ١١ = $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π سم^{٣}

الثانى (ب) :

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{١١}{٢}\right)^{٢}$ × ٥ = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π سم^{٣}

∴ الثانى (ب) أكبر من الأول (أ) فى السعة

الفرق بين سعتيهما = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π − $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π

= $\frac{٥٥}{٣}$ π سم^{٣}

مثال (٧) أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦π سم^{٢} ، طول راسمه ٣٠سم .

مثال (٨) أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤سم ، ارتفاعه ٢٥سم .

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

٦١٦ π = π نق (٣٠ + نق)

نق^{٢} + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

نق = ١٤ سم أو نق = −٤٤ (مرفوض)

∵ محيط القاعدة = ٤٤ ∴ ٢ π نق = ٤٤

∴ نق = $\frac{٢٢}{\pi}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{٢٢}{\pi}\right)^{٢}$ × ٢٥

≃ ١٢٨٣,٨ سم^{٣}

مثال (٩) أيهما أكبر حجما ؟ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم ، وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ، ومحيط قاعدته ٤٨سم .

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (١٥)^{٢} × ٢٠

= ١٥٠٠ π سم^{٣} ≃ ٤٧١٢,٤ سم^{٣}

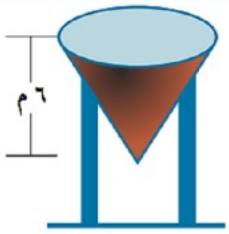
∵ طول ضلع القاعدة = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × (١٢)^{٢} × ٤٠ = ١٩٢٠ سم^{٣}

∴ حجم المخروط > حجم الهرم.

مثال (١٠) فى الشكل المقابل: صهريج مياه على شكل مخرط قائم ، حجمه ٣٢π م^{٣} ، ارتفاعه ٦م . أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية .



∵ حجم الصهريج = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

٣٢ π = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ٦

نق^{٢} = ١٦ ∴ نق = ٤ م

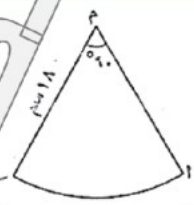
ل = $\sqrt{\text{نق}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ = $\sqrt{٤^{٢} + ٦^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ م

مساحته الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٤ × (٢ $\sqrt{١٣}$ + ٤)

= (١٦ + ٨ $\sqrt{١٣}$) π ≃ ١٤٠,٩ م^{٢}

مثال (١٠) قطاع دائرى م أب طول نصف قطر دائرته ١٨سم ، وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم . أوجد حجم هذا المخروط



طول راسم المخروط

= ١٨ سم

، ∵ محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = نق $\theta^{ء}$ = ١٨ × $\frac{٦٠° \times \pi}{١٨٠°}$

∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{\text{ل}^{٢} - \text{نق}^{٢}}$ = $\sqrt{(١٨)^{٢} - (٣)^{٢}}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٣)^{٢} × ٣ $\sqrt{٣٥}$

≃ ١٦٧,٣ سم^{٣}

مثال (١١) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم ، وقياس زاويته المركزية ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا . أوجد ارتفاع هذا المخروط

طول راسم المخروط = ٣٦ سم

، ∵ محيط دائرة المخروط

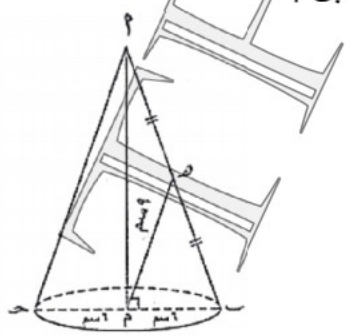
= $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = نق $\theta^{ء}$ = ٣٦ × $\frac{٢١٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٤٢ π

∴ ٢ π نق = ٤٢ π

∴ نق = ٢١ سم

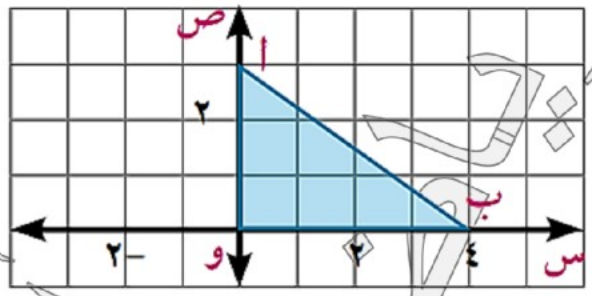
، ع = $\sqrt{(٣٦)^{٢} - (٢١)^{٢}}$ = ٣ $\sqrt{٥٥}$ ≃ ٢٩,٢٤ سم

تدريب :أوجد المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائرى القائم بالشكل المقابل :



مثال (١٣) يوضح الشكل المقابل : مستوى إحداثى متعامد ، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشىء عن دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول :

① محور السينات ② محور الصادات



① حول محور السينات ينتج مخروط

نق$_{١}$ = ٣ وحدة طوليه ، ع$_{١}$ = ٤ وحدة طوليه

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π $(٣)^{٢}$ × ٤

= ١٢ π وحدة مكعبة

② حول محور الصادات

نق$_{٢}$ = ٤ وحدة طوليه ، ع$_{٢}$ = ٣ وحدة طولية

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π $(٤)^{٢}$ × ٣

= ١٦ π وحدة مكعبة

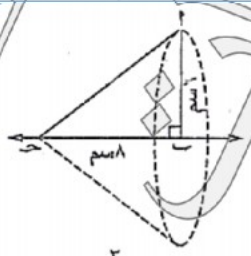
مثال (١٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم . أوجد حجم الجسم الناشىء من دوران △ أ ب جـ دورة كاملة حول : ① $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ② $\overleftrightarrow{أ جـ}$

① الجسم الناشىء

مخروط قائم طول نصف قطر

قاعدته = ٦ سم

وارتفاعه = ٨ سم



الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π × $٦^{٢}$ × ٨ = ٩٦ π سم^{٣}

② الجسم الناشىء عبارة مخروطان قاعدتهما

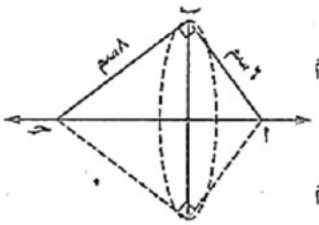
مشتركة نصف قطرهما = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

∴ طول راسم الأول = ٨ سم

∴ ع$_{١}$ = $\sqrt{٨^{٢} - ٤,٨^{٢}}$ = ٦,٤ سم

∴ طول راسم الثانى = ٦ سم

∴ ع$_{٢}$ = $\sqrt{٦^{٢} - ٤,٨^{٢}}$ = ٣,٦ سم



∴ حجم الجسم الناتج

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٤,٨)^{٢}$ × ٦,٤ + $\frac{١}{٣}$ × π × $(٤,٨)^{٢}$ × ٣,٦

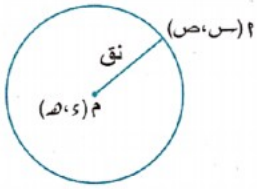
= ٧٦,٨ π سم^{٣}

الدرس الرابع
الدائرة

الدائرة : مجموعة من نقط المستوى التى تكون على بُعد ثابت من نقطة ثابتة في المستوى .

* تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (م)
* يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة (نق)
* نرمز للدائرة بالرمز (د) حيث د = {أ : م أ = نق ، نق > ٠}

أولاً : معادلة الدائرة (بدلالة إحداثى مركزها وطول نصف قطرها)



إذا كانت أ = (س ، ص) نقطة ما على الدائرة التى مركزها النقطة م (ء ، هـ) وطول نصف قطرها = نق فى مستوى إحداثى متعامد

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين نجد أن :

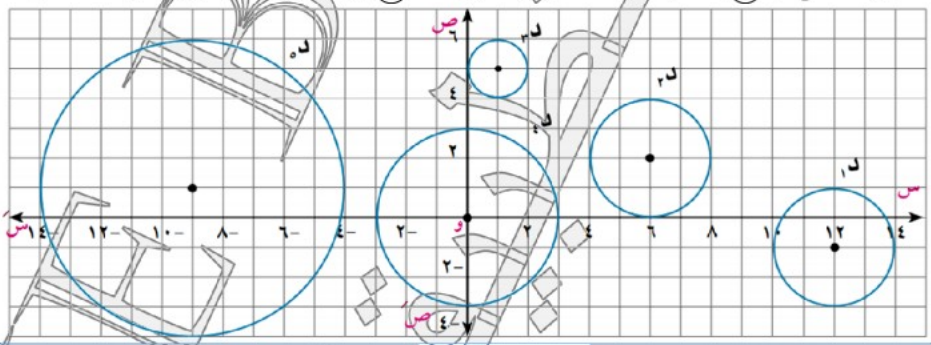
$\sqrt{(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2} = نق$

أى أن : $(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$ «معادلة الدائرة»

مثال (١) أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة م ، وطول نصف قطرها = نق في كل من الحالات :		
م = (٢ ، ٣) ، نق = ٥	م = (-٢ ، ٣) ، نق = ٨	م = (٠ ، -١) ، نق = ٢ $\sqrt{٣}$
$(س - ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$	$(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٦٤$	$(س)^2 + (ص + ١)^2 = ١٢$

ملحوظة	إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن معادلة الدائرة هى : $س^2 + ص^2 = نق^2$

مثال (٢) في الشكل التالى : ① اكتب معادلة كل دائرة ② أى من الدوائر التالية متطابقة ؟ مع التفسير .



① د١ : مركزها (١٢ ، -١) ، نق = ٢

∴ معادلة الدائرة د١ هى :

$(س - ١٢)^2 + (ص + ١)^2 = ٤$

، د٢ : مركزها (٦ ، ٢) ، نق = ٢

∴ معادلة الدائرة د٢ هى :

$(س - ٦)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

، د٣ : مركزها (١ ، ٥) ، نق = ١

∴ معادلة الدائرة د٣ هى :

$(س - ١)^2 + (ص - ٥)^2 = ١$

، د٤ : مركزها (٠ ، ٠) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة د٤ هى : $س^2 + ص^2 = ٩$

، د٥ : مركزها (-٩ ، ١) ، نق = ٥

∴ معادلة الدائرة د٥ هى :

$(س + ٩)^2 + (ص - ١)^2 = ٢٥$

② ∵ نق١ = نق٢ = ٢ ∴ د١ ، د٢ متطابقتان.

ملحوظة : الدوائر المتطابقة أنصاف أقطارها متطابقة

Eng / Amr Tawfek Khadr T : 01005270744

ملحوظة

وضع النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بالنسبة للدائرة د : (س − ء)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

* إذا كان : (س$_{١}$ − ء)^{٢} + (ص$_{١}$ − هـ)^{٢} = نق^{٢} فإن النقطة تقع على الدائرة.
* إذا كان : (س$_{١}$ − ء)^{٢} + (ص$_{١}$ − هـ)^{٢} > نق^{٢} فإن النقطة تقع خارج الدائرة.
* إذا كان : (س$_{١}$ − ء)^{٢} + (ص$_{١}$ − هـ)^{٢} < نق^{٢} فإن النقطة تقع داخل الدائرة.

مثال (٣) بين أى النقط الآتية تنتمى للدائرة د والتى معادلتها : (س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥ ، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث : أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ(٣ ، ٣) ، ء(٢ ، −٣)

(س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

بالتعويض بالنقط أ ، ب ، جـ ، ء

∵ أ (٩ ، ٣)

∴ (٩ − ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ النقطة أ تقع على الدائرة.

∵ ب (٧ ، ٥)

∴ (٧ − ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ٣٧ > نق^{٢}

∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة.

∵ جـ (٣ ، ٣)

∴ (٣ − ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ النقطة جـ تقع على الدائرة.

∵ ء (٢ ، −٣)

∴ (٢ − ٦)^{٢} + (−٣ + ١)^{٢} = ٢٠ < نق^{٢}

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

تدريب(١) : أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٠) وطول قطرها ٦سم . وبين أى النقط الآتية تقع عليها وبين مواضع النقط الأخرى بالنسبة للدائرة : أ(٣ ، ٣) ، ب(−٢ ، ٥) ، جـ(٨ ، ٠)

ثانيًا : الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$$\boxed{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{ل س} + ٢\,\text{ك ص} + \text{حـ} = ٠}$$

حيث المركز (م) = (− ل ، − ك) = (−$\frac{١}{٢}$ معامل س ، −$\frac{١}{٢}$ معامل ص)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{حـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

ملحوظة

عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١ لذلك يلزم أولاً القسمة على هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة.

مثال (٤) أوجد إحداثيى المركز ونصف القطر لكل من الدوائر الآتية :

① س^{٢} + ص^{٢} − ٨ = ٠ ② (س + ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٤٩

③ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٦ص − ١٢ = ٠ ④ ٧س^{٢} + ٧ص^{٢} − ٧س + ٢١ص = −$\frac{١}{٤}$ ٢٦

① مركز الدائرة (٠ ، ٠) ، نق = ٢ $\sqrt{٢}$

② مركز الدائرة (−٣ ، ٥) ، نق = ٧

③ ∵ ل = −٢ ، ك = ٣ ، حـ = −١٢

∴ مركز الدائرة = (٢ ، −٣)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{حـ}}$ = $\sqrt{٤ + ٩ + ١٢}$ = ٥

④ ∵ س^{٢} + ص^{٢} − س + ٣ ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

∴ ل = −$\frac{١}{٢}$ ، ك = $\frac{٣}{٢}$ ، حـ = −$\frac{١٥}{٤}$

∴ مركز الدائرة = ($\frac{١}{٢}$ ، −$\frac{٣}{٢}$)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{حـ}}$

= $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} + \frac{١٥}{٤}}$ = $\frac{٥}{٢}$

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

تذكر أن

① المماس لدائرة يكون عموديًا على نصف القطر من نقطة التماس .

② المماسان لدائرة و المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان .

③ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول .

④ إذا كانت : أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإن :

نقطة منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$)

⑤ طول العمود المرسوم من النقطة (س١،ص١) إلى الخط المستقيم الذى معادلته :

أ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

⑥ معادلة المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١) وميله = م هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م .

مثال (٥) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها م(٥ ، -١٢) وتمر بنقطة الأصل . ② $\overline{أب}$ قطر فى حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢)

③ مركزها يقع على محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٨ ، ٠)

④ مركزها م(٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢ ⑤ مركزها م يقع في الربع الأول وطول نصف قطرها يساوى ٣وحدات طول ، والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها .

⑥ مركزها م(٥ ، ٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (-١ ، ٣) .

⑦ تمر بالنقطتين أ(٦ ، ٢) ، ب(٠ ، -١) والمماسان لها عند أ ، ب متوازيان .

① نق = $\sqrt{(٥ - ٠)^٢ + (-١٢ - ٠)^٢}$ = ١٣

∴ $(س - ٥)^٢ + (ص + ١٢)^٢ = (١٣)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٢٤ ص = ٠$

② مركز الدائرة م = ($\frac{٦ + ٠}{٢}$ ، $\frac{-٤ + ٢}{٢}$)

= (٣ ، -١)

، نق = $\sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (-٤ + ١)^٢}$ = $٣\sqrt{٢}$

∴ $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = (٣\sqrt{٢})^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٢ ص - ٨ = ٠$

③ مركز الدائرة م = (٥ ، ٠) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٥)^٢ + (ص - ٠)^٢ = (٣)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ١٦ = ٠$

④ ∵ الدائرة تمس المستقيم : س = ٢

∴ نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هى :

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٨ ص + ٣٢ = ٠$

⑤ نق = ٣ ، م = (٤ ، ٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ٨ س - ١٠ ص + ٣٢ = ٠$

⑥ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = \frac{٣ - ٧}{١ + ٣}$

أى أن : $-س + ص - ٤ = ٠$

∴ نق = $\frac{|-١ \times ٥ + ١ \times ٣ - ٤|}{\sqrt{(-١)^٢ + (١)^٢}}$ = $٣\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هى :

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٨$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٦ ص + ١٦ = ٠$

⑦ ∵ المماسان متوازيان عند أ ، ب

∴ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

∴ مركز الدائرة م = ($\frac{٦ + ٠}{٢}$ ، $\frac{٢ - ١}{٢}$)

= (٣ ، $\frac{١}{٢}$)

∴ نق = $\sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (٢ - \frac{١}{٢})^٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

∴ معادلة الدائرة :

$(س - ٣)^٢ + (ص - \frac{١}{٢})^٢ = (\frac{٣\sqrt{٥}}{٢})^٢$

∴ أى : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ص - ٢ = ٠$

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

ملاحظات على الصورة العامة لمعادلة الدائرة

① الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$ تتصف بالآتى :

* معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص
* خالية من الحد المشتمل على س ص أى أن : معامل س ص = ٠
* معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

② لكى تمثل معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون : $ل^٢ + ك^٢ - حـ > ٠$

مثال (٦) بين مع ذكر السبب أيا من المعادلات الآتية تمثل دائرة وأيها لا تمثل دائرة :

① $س^٢ + ص^٢ + ٨س - ١٦ص - ١ = ٠$ ② $س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٥ص = ٠$

③ $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٣ص - ٨ = ٠$ ④ $\frac{١}{٤} س^٢ + \frac{١}{٤} ص^٢ + س - ٨ = ٠$ ⑤ $\frac{س - ٣}{ص + ١} = \frac{ص - ٢}{١ + س}$

① ∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١
، المعادلة خالية من س ص
، $ل^٢ + ك^٢ - حـ = (٤)^٢ + (-٨)^٢ + ١ = ٨١ > ٠$
∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

② ∵ معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢$
∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

③ $س^٢ + ص^٢ + \frac{٣}{٢} ص - ٤ = ٠$
∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١
، المعادلة خالية من س ص
، $ل^٢ + ك^٢ - حـ = (٠) + (\frac{٣}{٢})^٢ + ٤ = \frac{٩}{٤} + ٤ > ٠$
∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

④ $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٣٢ = ٠$
∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١
، المعادلة خالية من س ص
، $ل^٢ + ك^٢ - حـ = (٢)^٢ + ٣٢ = ٣٦ > ٠$
∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

⑤ $(س - ٣)(س + ١) = (٢ - ص)(ص + ١)$
∴ $س^٢ - ٢ س - ٣ = ص + ٢ - ص^٢$
∴ $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ص - ٥ = ٠$
∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١
، المعادلة خالية من س ص
، $ل^٢ + ك^٢ - حـ = (-١)^٢ + (-\frac{١}{٢})^٢ + ٥ = \frac{٢٥}{٤} > ٠$
∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

حالات خاصة لمعادلة الدائرة

(١) معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠$ المعادلة خالية من الحد المطلق أى (حـ = ٠)

مثال (٥) سؤال ①

(٢) معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور السينات هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + حـ = ٠$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص أى (ك = ٠)

مثال (٥) سؤال ③

(٣) معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ك ص + حـ = ٠$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على س أى (ل = ٠)

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

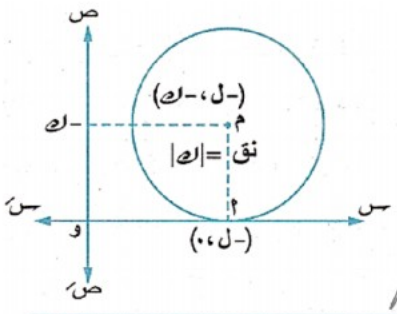
مثال (٧) أوجد معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات وتمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٠ ، ٧) .

الحـــــل

مركز الدائرة م = (٠ ، ٤) ، نق = ٣ ∴معادلة الدائرة هى : $(س - ٠)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٠$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ٨ص + ٧ = ٠$

(٤) معادلة الدائرة التى تمس محور السينات هى :



إذا مست الدائرة التى مركزها (-ل ، -ك)

محور السينات فإن :

نقطة التماس أ هى : (-ل ، ٠)

ويكون نق = |ك|

$\therefore حـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢ = ل^٢ + ك^٢ - ك^٢ = ل^٢$

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : $س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ل^٢ = ٠$

مثال (٨) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها النقطة (-٣ ، -٢) وتمس محور السينات

② طول نصف قطرها = ٥ وحدات طول وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

③ تمس محور السينات عند النقطة (-٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله $٤\sqrt{٣}$ وحدة طول

④ تمس محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (-٥ ، ٢)

① ل = ٣ ، ك = ٢

∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| = ٢ ، $حـ = ل^٢ = ٩$

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٦س + ٤ص + ٩ = ٠$

② ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (٤ ، ٠) ، نق = ٥

∴ م = (٤ ، ٥) أ، (٤ ، -٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

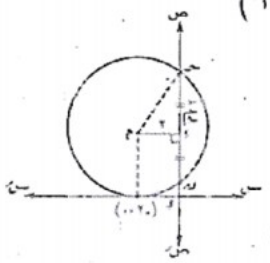
$(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ٨س - ١٠ص + ١٦ = ٠$

أ، المعادلة هى : $(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ١٠ص + ١٦ = ٠$

③ $نق = \sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$



∴ نق = ٤

∴ مركز الدائرة م

= (-٢ ، ٤)

∴ حـ

= ٤ + ١٦ - ١٦ = ٤

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٨ص + ٤ = ٠$

④ ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| ، $حـ = ل^٢$

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ل^٢ = ٠$

، ∵ (٢ ، ١) تحقق المعادلة

∴ ٤ + ١ + ٤ل + ٢ك + $ل^٢$ = ٠

∴ ٤ل + ٢ك + $ل^٢$ = -٥ (١)

، ∵ (-٥ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ٢٥ + ٤ - ١٠ل + ٤ك + $ل^٢$ = ٠

∴ -١٠ل + ٤ك + $ل^٢$ = -٢٩ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح : ∴ ١٤ل - ٢ك = ٢٤

∴ ك = ٧ل - ١٢ وبالتعويض فى (١)

∴ ٤ل + ٢ (٧ل - ١٢) + $ل^٢$ = -٥

∴ $ل^٢$ + ١٨ل - ١٩ = ٠

∴ (ل + ١٩) (ل - ١) = ٠

∴ ل = -١٩ أ، ل = ١

ومنها ك = -١٤٥ أ، ك = -٥

∴ توجد دائرتان

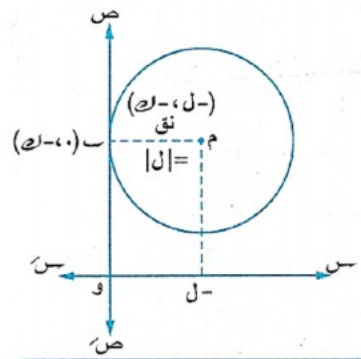
∴ المعادلة الأولى هى :

$س^٢ + ص^٢ - ٣٨س - ٢٩٠ص + ٢٦١ = ٠$

والأخرى : $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ١٠ص + ١ = ٠$

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

(٥) معادلة الدائرة التى تمس محور الصادات هى :



إذا مست الدائرة التى مركزها (-ل ، -ك)

محور الصادات فإن :

نقطة التماس ب هى : (٠ ، -ك)

ويكون نق = |ل|

∴ حـ = ل² + ك² − نق² = ل² + ك² − ل² = ك²

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : $\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\,\text{ل س} + 2\,\text{ك ص} + \text{ك}^2 = 0}$

مثال (٩) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها النقطة (٣ ، ٠) وتمس محور الصادات

② طول نصف قطرها = ٣,٥ وحدة وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، -٤)

③ تمس محور الصادات وتمر بالنقطتين (-٤ ، ٢) ، (-١ ، ٢)

① ل = -٣ ، ك = ٠

∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| = ٣ ، حـ = ك² = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

س² + ص² − ٦ س = ٠

② ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ م = (٣ ½ ، -٤) أ، (-٣ ½ ، -٤)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٣ ½)² + (ص + ٤)² = ١٢,٢٥

أى أن : س² + ص² − ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى :

(س + ٣ ½)² + (ص + ٤)² = ١٢,٢٥

أى أن : س² + ص² + ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

③ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| ، حـ = ك²

∴ معادلة الدائرة هى :

س² + ص² + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك² = ٠

، ∵ (-٤ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ١٦ + ٤ − ٨ ل + ٤ ك + ك² = ٠

أى أن : -٨ ل + ٤ ك + ك² = -٢٠ (١)

، ∵ (-١ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + ك² = ٠

أى أن : -٢ ل + ٤ ك + ك² = -٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ٦ ل = ١٥ ∴ ل = ٥/٢ ومن المعادلة (٢)

∴ -٥ + ٤ ك + ك² = -٥

∴ ك² + ٤ ك = ٠ ∴ ك (ك + ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = -٤

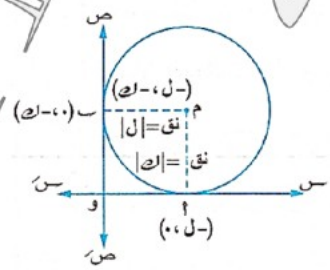
∴ توجد دائرتان.

معادلة الأولى هى : س² + ص² + ٥ س = ٠

، معادلة الأخرى هى :

س² + ص² + ٥ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

(٦) معادلة الدائرة التى تمس المحورين هى :



إذا مست الدائرة التى مركزها (-ل ، -ك)

المحورين فإن : نق = |ل| = |ك|

∴ حـ = ل² + ك² − نق² = نق² + نق² − نق² = نق²

∴ $\boxed{\text{حـ} = \text{ل}^2 = \text{ك}^2 = \text{نق}^2}$

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة :

س² + ص² + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

حيث : |ل| = |ك| = نق ، حـ = ل² = ك² = نق²

Eng / Amr Tawfek Khadr
T : 01005270744

مثال (١٠) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها النقطة (٥ ، -٥) وتمس محورى الإحداثيات .

② تمس المحورين وتمر بالنقطة (-٢ ، -٤)

③ تمس محور السينات عند النقطة (-٣ ، ٠) وتمس محور الصادات أيضًا .

① ل = -٥ ، ك = ٥

، ∵ الدائرة تمس محورى الإحداثيات

∴ نق = |ل| = |ك| = ٥ ، حـ = ٢٥

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ١٠ ص + ٢٥ = ٠

② ∵ الدائرة تمس المحورين

، ∵ النقطة (-٢ ، -٤) فى الربع الثالث

∴ المركز م = (-نق ، -نق)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س + نق)^{٢} + (ص + نق)^{٢} = نق^{٢}

، ∵ (-٢ ، -٤) ∈ الدائرة

∴ (-٢ + نق)^{٢} + (-٤ + نق)^{٢} = نق^{٢}

∴ ٤ + نق^{٢} - ٤ نق + ١٦ + نق^{٢} - ٨ نق = نق^{٢}

∴ نق^{٢} - ١٢ نق + ٢٠ = ٠

∴ (نق - ٢) (نق - ١٠) = ٠

∴ نق = ٢ ومنها م = (-٢ ، -٢) أ، نق = ١٠

ومنها م = (-١٠ ، -١٠)

∴ توجد معادلتان هما :

(س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠

أ، (س + ١٠)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠٠

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٢٠ س + ٢٠ ص + ١٠٠ = ٠

③ ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (-٣ ، ٠)

، وتمس محور الصادات.

∴ نق = ٣

، توجد دائرتان مركزهما (-٣ ، ٣) ، (-٣ ، -٣)

، معادلة الدائرة الأولى هى :

(س + ٣)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ٦ ص + ٩ = ٠

، معادلة الدائرة الثانية هى :

(س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٦ ص + ٩ = ٠

تذكر

✧ وضع مستقيم ل بالنسبة للدائرة د والتى مركزها (م) وبفرض أن $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ ⊥ ل ويقطعه فى حـ

* إذا كان : م حـ < نق فإن : ل قاطع للدائرة فى نقطتين مختلفتين.

* إذا كان : م حـ = نق فإن : ل مماس للدائرة.

* إذا كان : م حـ > نق فإن : ل خارج الدائرة ولا يقطعها فى أى نقطة.

تذكر

إذا كانت الدائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما على الترتيب هما نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ (حيث نق$_{١}$ > نق$_{٢}$)

① الدائرتان المتحدتا المركز : م ن = صفر

② الدائرتان المتباعدتان : م ن > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

③ الدائرتان المتماستان من الخارج : م ن = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

④ الدائرتان المتقاطعتان : نق$_{١}$ - نق$_{٢}$ < م ن < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

⑤ الدائرتان المتماستان من الداخل : م ن = نق$_{١}$ - نق$_{٢}$

⑥ الدائرتان المتداخلتان : م ن < نق$_{١}$ - نق$_{٢}$

تدريب (٢) بين أى دائرتين فيما يلى متطابقتان ؟ ولماذا ؟

① س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٨ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ص + ١٦ = ٠

② س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} - ١١ + ٦س = ٠

Eng / Amr Tawfek Khadr T : 01005270744

تدريب (٣) أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} – ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠
بالانتقال (س +٢ ، ص – ٢)

تدريب (٤) حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة :(س + ٣)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} =٩ إذا كانت معادلة المستقيم هى:
① ٣ س – ٤ ص + ٥ = ٠ ② ٦ س – ٨ ص + ٢٣ = ٠ ③ ٣ س – ٤ ص + ١٠ = ٠

تدريب (٥) حدد موضع الدائرة
① د١ : (س + ٢)^{٢} = ١ – ص^{٢} بالنسبة للدائرة د٢ : س^{٢} + ص^{٢} –٢ س – ٨ ص – ١٩ = ٠
② د١ : (س – ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} =٤ بالنسبة للدائرة د٢ : (س + ٧)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} =١
③ د١ : س^{٢} + ص^{٢} –١٠س – ٨ص + ١٦ = ٠ بالنسبة للدائرة د٢ : س^{٢} + ص^{٢} +١٤س +١٠ص – ٢٦ = ٠

تدريب (٦) إذا كانت الدائرتان د١ : (س + ٢)^{٢} + (ص + ١١)^{٢} = ك ، د٢ : (س – ٣)^{٢} + (ص – ١)^{٢} =١٦
متماستان أوجد قيم ك .